

MATHEMATIK

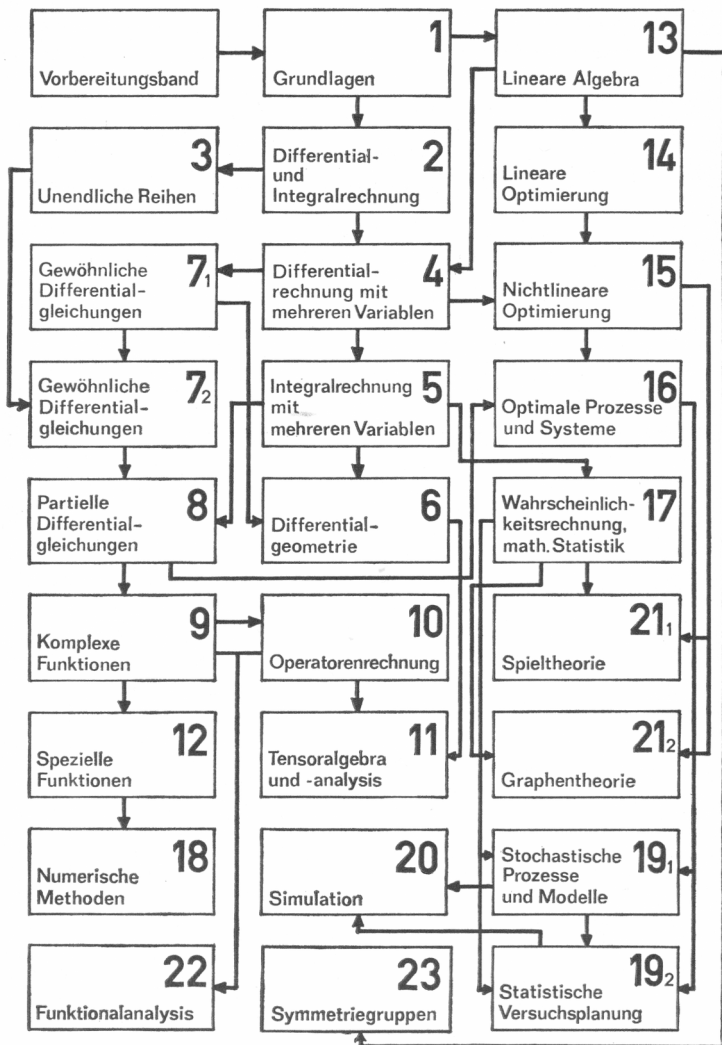
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

2

PFORR · SCHIROTZEK

Differential- und Integralrechnung
für Funktionen
mit einer Variablen

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 2

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

DOZ. DR. E. A. PFORR
DR. W. SCHIROTZEK

Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen

6., BEARBEITETE AUFLAGE



BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1986

Verantwortlicher Herausgeber:

1.-3. Auflage: Professor Dr. Otto Greuel †

ab 4. Auflage: Dr. sc. nat. Karl Manteuffel, ordentlicher Professor für Mathematische Methoden der Operationsforschung an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke“ Magdeburg

Autor der Kapitel 1-7:

Dr. sc. nat. Winfried Schirotzek, Oberassistent an der Technischen Universität Dresden

Autor der Kapitel 8-11:

Dr. sc. nat. Ernst-Adam Pforr, Dozent an der Technischen Universität Dresden

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, November 1985

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der 1. Auflage 1973



(Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte; 2)

NE: Schirotzek, Wilfried; GT

Pforr, Ernst-Adam:

Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen/E.-A. Pforr; W. Schirotzek.

6., bearb. Aufl. – Leipzig: BSB Teubner, 1986. – 244 S.

ISBN 3 322 00295 0

Math. Ing. Nat. wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 2

ISSN 0138-1318

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1973

6. Auflage

VLN 294-375/33/86 · LSV 1034

Lektor: Dorothea Ziegler/Jürgen Weiß

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,

Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Bestell-Nr. 665 677 7

01350

Vorwort

Dem vorliegenden Band 2 dieser Lehrbuchreihe kommt ebenso wie dem Band 1 insofern eine besondere Bedeutung innerhalb des gesamten Lehrwerkes zu, als nahezu alle anderen Bände darauf aufbauen.

Ein Teil der in diesem Buch behandelten Gegenstände ist auch im Lehrplan unserer Oberschulen enthalten. Ein Weglassen des dort bereits Dargebotenen hätte aber zu einer unzusammenhängenden Darstellung des Gebietes geführt; außerdem wäre nicht gewährleistet, daß alle Leser mit den gleichen Voraussetzungen die weiteren Bände studieren können.

Eine korrekte Anwendung mathematischer Methoden setzt die genaue Kenntnis der zugrunde liegenden Begriffe voraus. Es muß dem Leser daher dringend nahegelegt werden, sich um ein volles Verständnis der eingeführten Begriffe zu bemühen. Anhand von vielen Beispielen wird gezeigt, wie mathematische Begriffe in den Anwendungen zu interpretieren sind. Ein gründliches Studium des Textes und das selbständige Lösen der über 100 Übungsaufgaben sollte den Leser in die Lage versetzen, die spezifische Anwendbarkeit der behandelten Begriffe und Methoden in seinem Fachgebiet selbst zu erkennen.

Im Interesse einer straffen Darstellung mußte auf eine Reihe von Beweisen verzichtet werden. Alle Aussagen werden aber erläutert und – soweit möglich – geometrisch interpretiert.

Für wertvolle Hinweise danken wir vor allem dem Herausgeber, Herrn Prof. Dr. O. Greuel (Mittweida), den Gutachtern, Herrn Prof. Dr. W. Dück (Berlin) und Herrn Prof. Dr. H. Goering (Magdeburg), sowie Herrn Prof. Dr. G. Opitz (Dresden). Besonderer Dank gebührt Frau I. Kamenz für das sorgfältige Schreiben des Manuskripts. Dem Verlag sei für die gute Zusammenarbeit herzlich gedankt.

Dresden, Januar 1973

E. A. Pforr

W. Schirotzek

Vorwort zur 6. Auflage

In dieser Auflage wurden gegenüber der vorangegangenen an zwei Stellen inhaltliche Veränderungen größeren Umfangs vorgenommen. Im Hinblick auf den Einsatz von elektronischen Rechnern, insbesondere auch von Taschenrechnern, war die Darstellung der Näherungsverfahren (Abschnitt 7.7.) zu überarbeiten. Der algorithmische Aspekt wurde stärker herausgearbeitet, auf die Formulierung von Algorithmen in einer Programmiersprache jedoch verzichtet. Außerdem wurde der Abschnitt über elliptische Integrale (9.3.5.) erweitert.

Für die wertvolle Unterstützung bei der Überarbeitung von Abschnitt 7.7. sei Herrn Dr. sc. nat. S. Dietze (Dresden) herzlich gedankt.

Dresden, Juli 1985

E. A. Pforr

W. Schirotzek

Inhalt

| | |
|---|----|
| Teil 1: Differentialrechnung | 9 |
| 1. Problemstellung und Historisches | 9 |
| 2. Grenzwerte | 10 |
| 2.1. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ | 10 |
| 2.1.1. Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ | 10 |
| 2.1.2. Die „ ε - δ -Charakterisierung“ des Grenzwertes | 13 |
| 2.2. Einseitige Grenzwerte | 14 |
| 2.3. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ | 16 |
| 2.4. Bestimmte und unbestimmte Divergenz | 18 |
| 2.5. Grenzwertsätze | 19 |
| 2.6. Die Landauschen Ordnungssymbole | 23 |
| 3. Stetigkeit | 25 |
| 3.1. Der Begriff der Stetigkeit | 25 |
| 3.2. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit auf einem Intervall | 27 |
| 3.3. Unstetigkeitsstellen und ihre Klassifikation | 28 |
| 3.4. Eigenschaften stetiger Funktionen | 31 |
| 3.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen | 31 |
| 3.4.2. Stetigkeit der elementaren Funktionen | 32 |
| 3.4.3. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen | 34 |
| 3.4.4. Stetigkeit der Umkehrfunktion | 37 |
| 4. Ableitungen | 38 |
| 4.1. Vorbemerkungen | 38 |
| 4.2. Der Begriff der Ableitung | 39 |
| 4.2.1. Definition der Ableitung | 39 |
| 4.2.2. Bedeutung der Ableitung | 40 |
| 4.2.3. Beispiele | 41 |
| 4.2.4. Einseitige Ableitungen | 43 |
| 4.2.5. Differenzierbarkeit auf einem Intervall | 45 |
| 4.3. Differenzierbarkeit und Stetigkeit | 46 |
| 4.4. Allgemeine Differentiationsregeln | 46 |
| 4.4.1. Ableitungen von Summe, Produkt und Quotient | 46 |
| 4.4.2. Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel) | 48 |
| 4.4.3. Ableitung der Umkehrfunktion | 49 |
| 4.5. Ableitungen einiger Grundfunktionen | 51 |
| 4.5.1. Tabelle der Ableitungen | 51 |
| 4.5.2. Beweis der Formeln von 4.5.1. | 52 |
| 4.6. Technik des Differenzierens | 54 |
| 4.6.1. Beispiele | 54 |
| 4.6.2. Logarithmische Differentiation | 55 |
| 4.6.3. Bemerkungen | 57 |
| 4.7. Einige Ergänzungen zum Ableitungsbegriff | 58 |
| 4.7.1. Die Differentialgleichung $y' = \alpha y$ | 58 |

| | |
|--|-----|
| Inhalt | 5 |
| 4.7.2. Der Differentiationsoperator | 59 |
| 4.8. Ableitungen höherer Ordnung | 60 |
| 4.8.1. Definitionen und Beispiele | 60 |
| 4.8.2. Physikalische Bedeutung der 2. Ableitung | 62 |
| 4.8.3. Rechenregeln für Ableitungen höherer Ordnung | 63 |
| 5. Differentiale | 64 |
| 5.1. Weierstraßsche Zerlegungsformel und Differential | 64 |
| 5.2. Fehlerrechnung und Differential | 67 |
| 5.2.1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung | 67 |
| 5.2.2. Anwendung des Differentials | 69 |
| 5.3. Differentiale höherer Ordnung | 71 |
| 6. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen | 73 |
| 6.1. Die Sätze von Fermat und Rolle | 73 |
| 6.2. Mittelwertsätze der Differentialrechnung | 74 |
| 6.2.1. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung | 74 |
| 6.2.2. Folgerungen aus dem Mittelwertsatz | 77 |
| 6.2.3. Der erweiterte Mittelwertsatz der Differentialrechnung | 78 |
| 6.3. Die Taylorsche Formel und ihre Anwendung | 79 |
| 6.3.1. Taylorsche Formel für ganze rationale Funktionen | 79 |
| 6.3.2. Das Hornersche Schema | 80 |
| 6.3.3. Taylorsche Formel für beliebige Funktionen | 84 |
| 6.3.4. Taylorsche Formel einiger elementarer Funktionen | 88 |
| 6.3.5. Anwendungen der Taylorschen Formel | 92 |
| 7. Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen | 98 |
| 7.1. Berechnung von Grenzwerten | 98 |
| 7.1.1. Vorbemerkung | 98 |
| 7.1.2. Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (Regeln von Bernoulli - de l'Hospital) | 99 |
| 7.1.3. Grenzwerte vom Typ „ $0 \cdot (\pm\infty)$ “ und „ $(+\infty) - (+\infty)$ “ | 101 |
| 7.1.4. Grenzwerte vom Typ „ 0^0 “, „ $(+\infty)^0$ “ und „ $1^{\pm\infty}$ “ | 102 |
| 7.2. Monotonie | 103 |
| 7.3. Relative Extremwerte | 105 |
| 7.3.1. Der Begriff des relativen Extremwertes | 105 |
| 7.3.2. Eine notwendige Bedingung (kritische Stellen) | 106 |
| 7.3.3. Eine hinreichende Bedingung | 108 |
| 7.3.4. Eine weitere hinreichende Bedingung | 111 |
| 7.4. Absolute Extremwerte | 113 |
| 7.4.1. Ermittlung absoluter Extremwerte | 113 |
| 7.4.2. Einige Anwendungen | 114 |
| 7.5. Konvexität und Wendepunkte | 117 |
| 7.5.1. Konvexe und konkave Funktionen | 117 |
| 7.5.2. Wendepunkte | 118 |
| 7.6. Kurvendiskussion | 121 |
| 7.7. Näherungsweise Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$ | 125 |
| 7.7.1. Vorbemerkung | 125 |
| 7.7.2. Regula falsi | 125 |

| | |
|---|-----|
| 7.7.3. Das Newtonsche Verfahren | 129 |
| 7.7.4. Das allgemeine Iterationsverfahren | 132 |
| Teil 2: Integralrechnung | 139 |
| 8. Problemstellung und Historisches | 139 |
| 9. Das unbestimmte Integral | 141 |
| 9.1. Definition und einige Integrationsregeln | 141 |
| 9.1.1. Stammfunktionen und unbestimmte Integrale | 141 |
| 9.1.2. Unbestimmte Integrale der Grundfunktionen | 142 |
| 9.1.3. Einige allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale | 143 |
| 9.1.4. Die Substitutionsmethode bei unbestimmten Integralen | 144 |
| 9.1.5. Die partielle Integration | 147 |
| 9.1.6. Möglichkeiten und Grenzen der Integration und der Integrationsregeln | 149 |
| 9.2. Integration rationaler Funktionen | 149 |
| 9.2.1. Problemstellung und -reduzierung | 149 |
| 9.2.2. Zerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche | 150 |
| 9.2.3. Integration der Partialbrüche | 153 |
| 9.3. Integration weiterer Funktionenklassen | 155 |
| 9.3.1. Das Integral $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$ | 156 |
| 9.3.2. Das Integral $\int R(e^x) dx$ | 157 |
| 9.3.3. Das Integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$ | 158 |
| 9.3.4. Das Integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ | 159 |
| 9.3.5. Elliptische Integrale | 159 |
| 10. Das bestimmte Integral | 161 |
| 10.1. Definition, Existenz und Eigenschaften | 161 |
| 10.1.1. Integralsummen | 161 |
| 10.1.2. Das bestimmte Integral | 161 |
| 10.1.3. Integrierbare Funktionen | 163 |
| 10.1.4. Eigenschaften des bestimmten Integrals | 164 |
| 10.2. Berechnung bestimmter Integrale | 166 |
| 10.2.1. Problematik | 166 |
| 10.2.2. Bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze | 167 |
| 10.2.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 169 |
| 10.2.4. Die Substitutionsmethode bei bestimmten Integralen | 170 |
| 10.3. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale | 174 |
| 10.3.1. Problemstellung | 174 |
| 10.3.2. Die Rechteck- und die Trapezformel | 175 |
| 10.3.3. Die Simpsonsche Regel | 178 |
| 10.4. Einige Anwendungen des bestimmten Integrals | 182 |
| 10.4.1. Anwendungen in der Geometrie | 182 |
| 10.4.2. Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften | 193 |
| 10.4.3. Ein Integralmodell in der Ökonomie | 199 |
| 10.5. Einige Ergänzungen zum Integralbegriff | 200 |
| 10.5.1. Das bestimmte Integral und der Maßbegriff | 200 |
| 10.5.2. Andere Integralbegriffe | 202 |

| | |
|--|-----|
| 11. Uneigentliche Integrale | 206 |
| 11.1. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen | 206 |
| 11.1.1. Definition und Berechnung uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen | 206 |
| 11.1.2. Cauchyscher Hauptwert | 211 |
| 11.1.3. Existenzkriterien (Konvergenzkriterien) für uneigentliche Integrale | 213 |
| 11.2. Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkter Funktion | 215 |
| 11.2.1. Definition und Berechnung | 215 |
| 11.2.2. Einige Ergänzungen | 218 |
| Lösungen der Aufgaben | 220 |
| Literatur | 241 |
| Namen- und Sachregister | 242 |

1. Problemstellung und Historisches

Zur mathematischen Beschreibung von Naturvorgängen, aber auch von technischen und ökonomischen Prozessen ist die Differentialrechnung ein unentbehrliches Hilfsmittel. Es ist daher nicht verwunderlich, daß gerade von Naturforschern entscheidende Anstöße zu ihrer Entwicklung ausgingen. Wichtige Vorarbeiten wurden im 16. und 17. Jahrhundert geleistet. Die eigentlichen Urheber dieser Disziplin sind aber Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), die die Differential- (und Integral-) Rechnung etwa gleichzeitig und voneinander unabhängig zu einem Kalkül entwickelten. Newton schuf seine „Fluxionsrechnung“ bei der Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegung.

Leibniz, der auch das Symbol $\frac{dy}{dx}$ einführte, ging von dem Problem aus, an eine Kurve in einem vorgegebenen Kurvenpunkt die Tangente zu legen („Tangentenproblem“). Die Arbeiten dieser genialen Forscher lösten eine außerordentlich rasche Entwicklung der Mathematik aus, die ihrerseits in hohem Maße befruchtend auf andere Wissenschaften wirkte. Entscheidenden Anteil an dieser Entwicklung hatten die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (1654–1705 bzw. 1667–1748), auf deren Vorlesungen auch das erste, 1696 erschienene Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung des Marquis de l'Hospital (1661–1704) basiert.

Wie wir noch sehen werden, beruht die Differentialrechnung, ebenso wie die Integralrechnung, auf dem Begriff des *Grenzwertes*. Zeitlich ging jedoch die kalkülmäßige Entwicklung der Differential- und Integralrechnung der strengen Begriffsdefinition voran. Daraus entstanden immer häufiger Schwierigkeiten und Unstimmigkeiten, die sich zunächst nicht überwinden ließen. Schließlich führte Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) den Grenzwertbegriff in die Mathematik ein. Doch erst Bernard Bolzano (1781–1848) und Augustin Louis Cauchy (1789–1857) wendeten diesen Begriff konsequent an und stellten damit die Infinitesimalrechnung (zu der man neben der Differential- und Integralrechnung auch die Theorie der unendlichen Reihen zählt) auf ein solides Fundament.

Vor einem Aufbau der Differentialrechnung ist also der Grenzwertbegriff für Funktionen zu behandeln. Zwangsläufig wird man damit zum Begriff der *Stetigkeit* geführt. Die eigentliche Differentialrechnung beginnt mit der Definition der *Ableitung* einer Funktion.

Alle drei Begriffe werden zur exakten Beschreibung bestimmter Sachverhalte in den unterschiedlichsten Gebieten herangezogen. So kann man mit dem Grenzwertbegriff z. B. das Verhalten einer zeitabhängigen Größe, „nach sehr langer Zeit“ charakterisieren, mit dem Begriff der Stetigkeit bzw. Unstetigkeit den „kontinuierlichen“ bzw. „sprunghaften“ Ablauf eines Vorgangs erfassen und mit der Ableitung die „Änderungsgeschwindigkeit“ eines Prozesses beschreiben.

Die mathematischen Möglichkeiten reichen jedoch über die unmittelbare Anwendbarkeit dieser Begriffe weit hinaus. So werden wir unter Verwendung der Differentialrechnung u. a. Näherungsformeln für (nichtrationale) Funktionen herleiten, Methoden zur Ermittlung von Extremwerten angeben und Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen behandeln. Dem „Praktiker“ werden damit Hilfsmittel zur Verfügung gestellt, auf die er fortlaufend zurückgreifen muß.

2. Grenzwerte

2.1. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$

2.1.1. Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow x_0$

Im folgenden bedeutet „Funktion“ stets „reellwertige Funktion einer reellen Variablen“.

Als Vorbereitung auf den Grenzwertbegriff für Funktionen behandeln wir das

Beispiel 2.1: An die Parabel $y = x^2$ werde die Sekante durch den festen Kurvenpunkt $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ und den variablen Kurvenpunkt $P(x, x^2)$ gelegt (s. Bild 2.1). Der Anstieg der Sekante ist eine Funktion f von x :

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \quad (x \neq \frac{1}{2}). \quad (2.1)$$

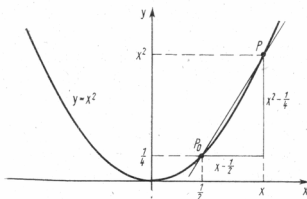


Bild 2.1

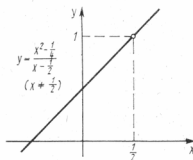


Bild 2.2

Auf Grund der Anschauung wird man vermuten, daß bei „Annäherung“ von x an die Stelle $\frac{1}{2}$ die Sekante in eine gewisse „Grenzlage“ übergeht, also auch ihr Anstieg (2.1) einen gewissen „Grenzwert“ annimmt. Betrachten wir also die Funktion f . An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ist f nicht definiert. Für $x \neq \frac{1}{2}$ gilt

$$f(x) = \frac{(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2} \quad (x \neq \frac{1}{2}). \quad (2.2)$$

Die Bildkurve von f ist in Bild 2.2 dargestellt¹⁾. Die Anschauung legt jetzt etwa die folgende Formulierung nahe: „Für x gegen $\frac{1}{2}$ strebt $f(x)$ gegen 1.“

Unsere Aufgabe wird es nun sein, einer solchen Formulierung einen von der Anschauung unabhängigen, wohldefinierten Sinn zu geben.

Soll allgemein das Verhalten einer Funktion f bei „Annäherung“ der unabhängigen Variablen x an eine reelle Zahl x_0 untersucht werden, so ist es naheliegend, die Variable x Zahlenfolgen (x_n) mit folgenden Eigenschaften durchlaufen zu lassen:

(E 1) $x_n \in D(f)^2$ für alle n ($n = 1, 2, 3, \dots$),

(E 2) $x_n \neq x_0$ für alle n ,

(E 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

¹⁾ In Bild 2.2 soll der kleine Kreis um den Punkt $(\frac{1}{2}, 1)$ andeuten, daß dieser Punkt nicht zur Bildkurve von f gehört. Analog wird in den folgenden Beispielen verfahren.

²⁾ $D(f)$ bezeichnet den Definitionsbereich von f .

Die Eigenschaft (E 2) bedeutet, daß das Verhalten von f an der Stelle x_0 selbst nicht in Betracht gezogen wird. Daher braucht f auch nur in einer sog. *punktierten Umgebung* von x_0 definiert zu sein. Das ist, mit einem $c > 0$, die Menge aller x mit

$$x_0 - c < x < x_0 + c \quad \text{und} \quad x \neq x_0 \quad (\text{s. Bild 2.3}).$$

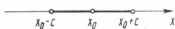


Bild 2.3

Das Verhalten von f in einer punktierten Umgebung von x_0 wird nun durch das Verhalten der Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ charakterisiert.

Definition 2.1: Die Funktion f sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung von x_0 definiert. Eine Zahl g heißt **Grenzwert von f für x gegen x_0** , in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow g \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0,$$

wenn für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften (E 1), (E 2), (E 3) die Folge $(f(x_n))$ gegen g konvergiert.

Damit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion auf den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen zurückgeführt.

In Bild 2.4 haben wir die ersten drei Glieder einer Folge (x_n) und der zugehörigen Folge $(f(x_n))$ eingezeichnet.

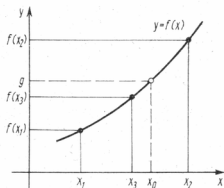


Bild 2.4

Beispiel 2.2: Gesucht ist der Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad x \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit

$$x_n \neq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Unter Verwendung von (2.2) und bekannten Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen folgt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \frac{1}{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (2.4)$$

Die Gültigkeit von (2.4) wurde für eine beliebige und damit für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften (2.3) bewiesen. Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = 1,$$

was in Einklang mit der Anschauung steht (Bild 2.2).

Beispiel 2.3: Wir wollen den Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} & \text{für } x \neq \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

für $x \rightarrow \frac{1}{2}$ ermitteln (s. Bild 2.5).

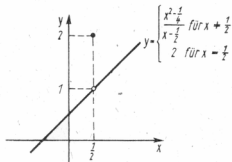


Bild 2.5

Obwohl f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ definiert ist, werden auch hier nur Folgen (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ betrachtet, für die $x_n \neq \frac{1}{2}$ für alle n gilt (vgl. (E 2)). Für jede solche Folge erhält man wie in Beispiel 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - \frac{1}{4}}{x_n - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \frac{1}{2}) = 1,$$

also ist

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1.$$

* **Aufgabe 2.1:** Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{x - 1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

Beispiel 2.4: Nun soll das Verhalten von $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) für $x \rightarrow 0$ untersucht werden. Die Bildkurve von f (Bild 2.6) schwankt für $x \rightarrow 0$ ständig zwischen -1 und 1 , wobei die Scheitel immer dichter aufeinander folgen. Wir wollen zeigen, daß f für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert hat. Dazu genügt es, eine Folge (x_n) mit

$$x_n \neq 0 \text{ für alle } n \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (2.5)$$

anzugeben, für die die Folge $(f(x_n))$ divergent ist. Setzen wir zum Beispiel

$$x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \text{ dann gilt (2.5), aber wegen}$$

$$f(x_n) = \sin(n\pi - \pi/2) = (-1)^{n+1}$$

ist die Folge $(f(x_n))$ (unbestimmt) divergent.

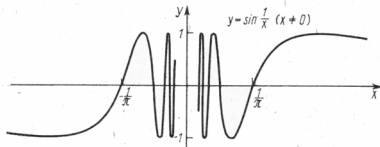


Bild 2.6

Man kann den Beweis auch dadurch führen, daß man zwei Folgen (x_n) und (\tilde{x}_n) mit den Eigenschaften (2.5) angibt, für die die Folgen $(f(x_n))$ und $(f(\tilde{x}_n))$ verschiedene Grenzwerte haben.

Aufgabe 2.2: Führen Sie den Beweis in der soeben angedeuteten Weise durch! *

Beispiel 2.5: Abschließend betrachten wir noch die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x > -1, x \neq 0) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Für die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{1}{n}$ gilt (vgl. Band 1, Abschnitt 10.7.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e. \quad (2.6)$$

Ohne Beweis¹⁾ sei mitgeteilt, daß (2.6) sogar für jede Folge (x_n) mit $x_n > -1$, $x_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt. Damit erhält man den für spätere Anwendungen wichtigen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (2.7)$$

2.1.2. Die „ ε - δ -Charakterisierung“ des Grenzwertes

Auf Grund der Anschauung wird man vermuten, daß man die Gleichung $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ auch folgendermaßen interpretieren kann:

„Der Abstand zwischen $f(x)$ und g (also $|f(x) - g|$) ist beliebig klein, wenn nur der Abstand zwischen x und x_0 hinreichend klein, aber von null verschieden ist.“ In geeigneter Präzisierung ist das der Inhalt des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 2.1: Die Funktion f sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung der Stelle x_0 definiert. Genau dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebigen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad (2.8)$$

für alle x mit

$$0 < |x - x_0| < \delta. \quad (2.9)$$

Eine geometrische Deutung dieses Satzes gibt Bild 2.7. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen bedeutet $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, daß zu jedem (noch so schmalen) „ ε -Streifen“

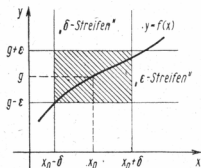


Bild 2.7

¹⁾ Beweise zu Teil 1 dieses Buches findet man, wenn nichts anderes gesagt ist, in [5] und [10].

um $y = g$ ein „ δ -Streifen“ um $x = x_0$ existiert, so daß alle Punkte der Bildkurve von f , die in diesem „ δ -Streifen“ – außer auf der Mittellinie $x = x_0$ ¹⁾ – liegen, auch dem vorgegebenen „ ε -Streifen“ angehören. Dabei ist offenbar δ im allgemeinen um so kleiner zu wählen, je kleiner ε vorgegeben ist. Diesen Sachverhalt soll die Schreibweise $\delta = \delta(\varepsilon)$ zum Ausdruck bringen.

Beispiel 2.6: Als Anwendung des Satzes wollen wir zeigen, daß

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad (x_0 > 0) \quad (2.10)$$

gilt (Bild 2.8). Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Gemäß (2.8) ist $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|$ abzuschätzen. Wir erweitern mit $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$ und erhalten

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| < \varepsilon \quad (2.11)$$

für alle $x \geq 0$ mit $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \varepsilon$. Daher setzen wir δ gleich der kleineren der beiden Zahlen x_0 und $\sqrt{x_0} \varepsilon$. Für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann $x \geq 0$ (warum?) und (2.11).

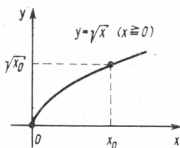


Bild 2.8

2.2. Einseitige Grenzwerte

Für die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x}$ ist die Voraussetzung $x_0 > 0$ wesentlich (s. (2.10)), denn für $x_0 \leq 0$ gibt es keine punktierte Umgebung von x_0 , in der die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) definiert ist. Im Falle $x_0 \leq 0$ existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x}$ also nicht.

Der Stelle $x_0 = 0$ kann man sich aber immerhin noch „von rechts nähern“, ohne den Definitionsbereich von f zu verlassen. Diese Überlegung führt zum Begriff der einseitigen Grenzwerte.

D. 2.2 Definition 2.2: Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $(x_0, x_0 + c)$ ²⁾ ($c > 0$) definiert. Eine Zahl g_r heißt **rechtsseitiger Grenzwert von f für x gegen x_0 , in Zeichen**

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = g_r \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow g_r \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0 + 0$$

¹⁾ Man beachte, daß $|x - x_0| > 0$ äquivalent zu $x \neq x_0$ ist.

²⁾ Ein solches Intervall nennt man auch punktierte rechtsseitige Umgebung von x_0 .

³⁾ Statt $\lim_{x \rightarrow 0 + 0} f(x) = g_r$ (bzw. $f(x) \rightarrow g_r$, für $x \rightarrow 0 + 0$) schreibt man kurz $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g_r$ (bzw. $f(x) \rightarrow g_r$ für $x \rightarrow +0$).

wenn für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften

$$(E\ 1) \quad x_n \in D(f) \quad \text{für alle } n,$$

$$(E\ 2^*) \quad x_n > x_0 \quad \text{für alle } n,$$

$$(E\ 3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

die Folge $(f(x_n))$ gegen g_r konvergiert (s. Bild 2.9).

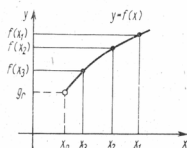


Bild 2.9

Analog definiert man den **linksseitigen Grenzwert g_l von f für x gegen x_0** , in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = g_l \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow g_l \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0 - 0^1).$$

Beispiel 2.7: Es gilt (s. Bild 2.8)

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0, \quad (2.12)$$

denn für jede Folge (x_n) mit $x_n > 0$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 0$ (s. Band 1, Abschnitt 10.5.).

Das folgende Beispiel zeigt, daß der Begriff des einseitigen Grenzwertes auch für Funktionen von Bedeutung ist, die in einer (punkttierten) Umgebung von x_0 definiert sind.

Beispiel 2.8: Es soll das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{für } 0 < x \leq 3, \\ x - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

bei „Annäherung“ an die Stelle $x_0 = 3$ untersucht werden (s. Bild 2.10). Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $0 < x_n < 3$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = 1.$$

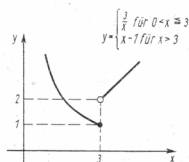


Bild 2.10

¹⁾ Vgl. Fußnote 3, S. 14.

Daher ist $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 1$. Analog erhält man $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 2$.

Über den Zusammenhang zwischen den einseitigen Grenzwerten und dem Grenzwert (schlechthin) gilt der folgende Satz.

S. 2.2 Satz 2.2: Die Funktion f hat genau dann für x gegen x_0 einen Grenzwert, wenn die einseitigen Grenzwerte von f für x gegen x_0 existieren und übereinstimmen. In diesem Falle gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

Nach diesem Satz hat also die in Beispiel 2.8 betrachtete Funktion f wegen $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$ für $x \rightarrow 3$ keinen Grenzwert.

* **Aufgabe 2.3:** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{für} \quad x \rightarrow +0, x \rightarrow -0 \quad \text{und} \quad x \rightarrow 0.$$

2.3. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$

Zur Charakterisierung des Verhaltens einer Funktion bei unbegrenztem Zunehmen oder Abnehmen der unabhängigen Variablen geben wir die folgende

D. 2.3 Definition 2.3: Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $(a, +\infty)$ definiert. Eine Zahl g heißt **Grenzwert von f für x gegen $+\infty$** , in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow g \quad \text{für} \quad x \rightarrow +\infty,$$

wenn für jede Folge (x_n) in $D(f)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ die Folge $(f(x_n))$ gegen g konvergiert.

Geometrisch bedeutet $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$, daß sich die Bildkurve von f mit wachsendem x immer mehr der Geraden $y = g$ annähert. Dabei braucht f nicht monoton zu sein (s. Bild 2.11).

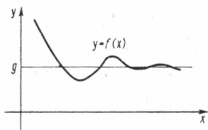


Bild 2.11

Analog definiert man

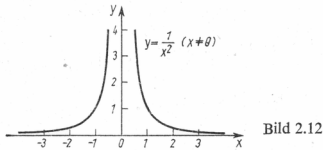
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g.$$

Im Zusammenhang mit den folgenden Beispielen sei an die Bildkurven der jeweiligen Funktion erinnert.

Beispiel 2.9: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0, \text{ ganz}), \quad (2.13)$$

denn ist (x_n) irgendeine gegen $+\infty$ oder $-\infty$ bestimmt divergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle n , dann ist, wie man zeigen kann, auch die Folge $(x_n^k)_{n=1, 2, \dots}$ bestimmt divergent und daher die Folge $\left(\frac{1}{x_n^k}\right)_{n=1, 2, \dots}$ eine Nullfolge (s. Bild 2.12 für $k = 2$).



Beispiel 2.10: Wir wollen die Grenzwertaussage

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1) \quad (2.14)$$

beweisen. Es sei also (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so daß gilt

$$x_n < \log_a \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da die Funktion $f(x) = a^x$ ($a > 1$) streng monoton wachsend ist, folgt

$$|a^{x_n} - 0| = a^{x_n} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Folglich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 0$. Da die Folge (x_n) beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

Ersetzt man x durch $-x$, so geht (2.14) über in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} = 0 \quad (a > 1). \quad (2.15)$$

Ist x eine Variable für die Zeit, dann bedeutet die Existenz von $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$, daß sich die zeitabhängige Größe $y = f(x)$ mit zunehmender Zeit immer mehr dem stationären (d. h. zeitunabhängigen) Wert g nähert.

Beispiel 2.11: Die Geschwindigkeit ¹⁾ v eines fallenden Körpers der Masse m ist unter der Annahme eines geschwindigkeitsproportionalen Luftwiderstands (Proportionalitätsfaktor $k > 0$) durch

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (t \geq 0)$$

gegeben (t : Zeit, v_0 : Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, g : Erdbeschleunigung). In der Lösung zu Aufgabe 2.4 wird gezeigt, daß gilt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = \frac{mg}{k}, \quad (2.16)$$

¹⁾ In 4.2.2. werden wir die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung exakt definieren.

d. h., nach hinreichend langer Zeit t hat die Geschwindigkeit v nahezu den konstanten Wert $\frac{mg}{k}$. In Bild 2.13 haben wir v als Funktion von t für den Fall $v_0 < \frac{mg}{k}$ dargestellt.

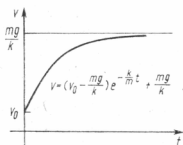


Bild 2.13

2.4. Bestimmte und unbestimmte Divergenz

Besitzt eine Funktion f für eine der „Bewegungen“

$$x \rightarrow x_0; \quad x \rightarrow x_0 + 0, x \rightarrow x_0 - 0; \quad x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty \quad (2.17)$$

einen Grenzwert, dann heißt sie für diese „Bewegung“ *konvergent*, andernfalls *divergent*. Wie für Zahlenfolgen kann man auch für Funktionen zwei Arten der Divergenz unterscheiden.

D. 2.4 Definition 2.4: Die Funktion f heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) für eine der „Bewegungen“ (2.17) der unabhängigen Variablen x , wenn für jede diese „Bewegung“ realisierende Folge¹⁾ (x_n) in $D(f)$ die Folge $(f(x_n))$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ist.

Ist f für eine der „Bewegungen“ (2.17) weder konvergent noch bestimmt divergent, so heißt f für diese „Bewegung“ **unbestimmt divergent**.

Ist f bestimmt divergent gegen $+\infty$ für $x \rightarrow x_0$, so schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

und sagt auch, f habe für $x \rightarrow x_0$ den *uneigentlichen Grenzwert* $+\infty$. Analoge Schreib- und Sprechweisen sind in den anderen Fällen bestimmter Divergenz üblich.

Beispiel 2.12: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(s. Bild 2.12), denn in Band 1, Beispiel 10.11, wurde gezeigt, daß für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq 0$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ die Folge $\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Beispiel 2.13: Es soll die Grenzwertaussage

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$$

bewiesen werden. Es sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle n . Zu jeder (insbeson-

¹⁾ Man sagt z. B., die Folge (x_n) *realisiere* die „Bewegung“ $x \rightarrow x_0 + 0$, wenn $x_n > x_0$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt.

dere beliebig großen) Zahl $K > 0$ existiert dann eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(K)$, so daß gilt

$$x_n = |x_n - 0| < e^{-K} \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also

$$\ln x_n < -K \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = -\infty$, und die Behauptung ist bewiesen.

Beispiel 2.14: Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist für $x \rightarrow +\infty$ unbestimmt divergent. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Folge (x_n) mit $x_n = n\pi - \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$): Offenbar gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, aber wegen $f(x_n) = (-1)^{n+1}$ ist die Folge $(f(x_n))$ unbestimmt divergent. Ganz entsprechend hatten wir bereits in Beispiel 2.4 gezeigt, daß die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) für $x \rightarrow 0$ unbestimmt divergent ist.

2.5. Grenzwertsätze

In diesem Abschnitt werden einige Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen angegeben. Da der Grenzwertbegriff für Funktionen auf den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen zurückgeführt wurde, kann man diese Regeln leicht aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen ableiten. Wir verzichten auf eine Durchführung der Beweise.

Bemerkung 2.1: Die folgenden für die „Bewegung“ $x \rightarrow x_0$ formulierten Sätze gelten sinngemäß¹⁾ auch für die „Bewegungen“

$$x \rightarrow x_0 + 0, x \rightarrow x_0 - 0; \quad x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty.$$

Satz 2.3: Die Funktionen f_1 und f_2 seien für $x \rightarrow x_0$ konvergent mit

S. 2.3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g_2.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2, \quad (2.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) - f_2(x)] = g_1 - g_2, \quad (2.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [cf_1(x)] = cg_1 \quad (c \text{ eine Konstante}), \quad (2.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = g_1 \cdot g_2. \quad (2.21)$$

Ist außerdem $f_2(x) \neq 0$ für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 und $g_2 \neq 0$, dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}. \quad (2.22)$$

¹⁾ Wird z. B. statt $x \rightarrow x_0$ die „Bewegung“ $x \rightarrow +\infty$ betrachtet, so ist in den folgenden Sätzen „punktierte Umgebung von x_0 “ durch „Intervall $(a, +\infty)$ “ zu ersetzen. Analog ist in den anderen Fällen zu verfahren.

Beispiel 2.15: Gesucht ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} x(3 - \sqrt{x}).$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$ (vgl. (2.10)) folgt mit (2.21) und (2.19)

$$\lim_{x \rightarrow 2} x(3 - \sqrt{x}) = 2(3 - \sqrt{2}).$$

Beispiel 2.16: Es soll der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1} \quad (2.23)$$

berechnet werden. Da $f_1(x) = 2x^2 + 5x$ (und auch $f_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$) für $x \rightarrow -\infty$ divergent ist, kann man (2.22) nicht unmittelbar auf (2.23) anwenden. Wir formen daher zunächst um und erhalten dann unter Verwendung von Satz 2.3 und (2.13)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

S. 2.4 Satz 2.4: Es sei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

und für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 gelte

$$f(x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f(x) < 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Beispiel 2.17: Die Abbildung durch einen sphärischen Hohlspiegel der Brennweite $f > 0$ wird bei Beschränkung auf Paraxialstrahlen durch die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

beschrieben. Dabei ist a bzw. a' die Gegenstands- bzw. Bildweite (s. Bild 2.14).

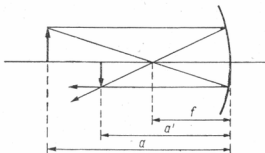


Bild 2.14

Aus dieser Gleichung ergibt sich a' als Funktion φ von a zu

$$a' = \varphi(a) = \frac{a \cdot f}{a - f} \quad (a > 0, a \neq f)^1).$$

Mit Satz 2.3 folgt unmittelbar

$$\lim_{a \rightarrow +0} \varphi(a) = \frac{0}{-f} = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{a}} = \frac{f}{1 - 0} = f.$$

Ferner gilt

$$\lim_{a \rightarrow f+0} \frac{1}{\varphi(a)} = \lim_{a \rightarrow f+0} \frac{a - f}{a \cdot f} = \frac{0}{f^2} = 0,$$

und für alle $a > f$ ist $\frac{1}{\varphi(a)} > 0$. Daraus folgt nach Satz 2.4 unter Beachtung von Bemerkung 2.1 die Aussage $\lim_{a \rightarrow f+0} \varphi(a) = +\infty$. Entsprechend findet man $\lim_{a \rightarrow f-0} \varphi(a) = -\infty$.

In Bild 2.15 ist die Funktion φ dargestellt. (Für $a > f$, also $a' > 0$, erhält man ein reelles Bild; für $0 < a < f$, also $a' < 0$, ein virtuelles Bild.)

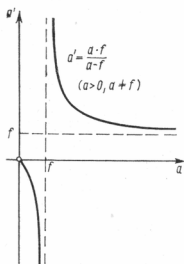


Bild 2.15

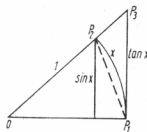


Bild 2.16

Satz 2.5: Es sei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g,$$

und für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 gelte

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

S. 2.5

¹⁾ In diesem Beispiel bezeichnet f also eine Konstante und a die unabhängige Variable (der Funktion φ).

Beispiel 2.18: Mit Hilfe von Satz 2.5 wollen wir den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

berechnen. Aus Bild 2.16 liest man ab: Der Flächeninhalt des Dreiecks OP_1P_2 ist kleiner als der des Kreissektors OP_1P_2 , und dieser ist kleiner als der des Dreiecks OP_1P_3 , d. h., es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x \quad \text{für } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.24)$$

Wegen $\sin x > 0$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und der ersten Ungleichung in (2.24) gilt

$$0 < \sin x < x \quad \text{für } \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (2.25)$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow +0} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} x = 0$ folgt aus (2.25) durch sinngemäße Anwendung von Satz 2.5 auf die „Bewegung“ $x \rightarrow +0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0 \quad (2.26)$$

und daraus

$$\lim_{x \rightarrow -0} \sin x = \lim_{x \rightarrow +0} \sin(-x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0. \quad (2.27)$$

Wegen (2.26) und (2.27) gilt nach Satz 2.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad (2.28)$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1. \quad (2.29)$$

Multipliziert man die 2. Ungleichung in (2.24) mit $\frac{2}{\sin x}$ und bildet anschließend den Kehrwert, so erhält man für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (2.30)$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ gilt (2.30) auch für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, also in einer punktierten Umgebung von $x = 0$. Nach Satz 2.5 folgt daher aus (2.29) und (2.30) schließlich

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.31)$$

* **Aufgabe 2.4:** Beweisen Sie die Formel (2.16).

* **Aufgabe 2.5:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2-1},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2-1},$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^3 + 7} + \frac{4x^3 - 5}{2x^3 + 3x} \right), & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2}, \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}. \end{array}$$

Aufgabe 2.6: Beweisen Sie: Ist f eine echt gebrochen rationale Funktion, so gilt $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ (vgl. Aufgabe 2.5 b).

2.6. Die Landauschen Ordnungssymbole

Zum Vergleich des Grenzverhaltens zweier Funktionen erweisen sich die **Landauschen¹⁾ Ordnungssymbole** o und O (lies „klein-o“ bzw. „groß-o“) als nützlich.

Definition 2.5: Die Funktionen f und φ seien (mindestens) in einer punktierten Umgebung U von x_0 definiert, und φ sei dort von null verschieden. Gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

so schreibt man

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Ist $\frac{f}{\varphi}$ auf U beschränkt, d. h., gibt es eine positive Zahl m mit

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \leq m \quad \text{für alle } x \in U,$$

so schreibt man

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Die Symbole

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{für } x \rightarrow +\infty,$$

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 - 0 \text{ usw.}$$

werden analog definiert (vgl. Fußnote auf Seite 19). Geht aus dem Zusammenhang unmißverständlich hervor, welche „Bewegung“ der unabhängigen Variablen x betrachtet wird, so läßt man deren Angabe häufig weg, schreibt also z. B. nur $f(x) = o(\varphi(x))$. Konvergieren f und φ für eine bestimmte „Bewegung“ von x gegen null, so bedeutet $f(x) = o(\varphi(x))$, daß f „schneller“ – „von höherer Ordnung“ – gegen null konvergiert als φ . Entsprechend bedeutet $f(x) = O(\varphi(x))$, daß f „mindestens so schnell“ – „von mindestens gleicher Ordnung“ – gegen null konvergiert wie φ . Schließlich sei noch erwähnt, daß man statt

$$f(x) - g(x) = o(\varphi(x))$$

auch

$$f(x) = g(x) + o(\varphi(x))$$

schreibt; analog für O .

¹⁾ Edmund Landau (1877–1938), deutscher Mathematiker.

Beispiel 2.19: Nach (2.30) und der darauffolgenden Bemerkung gilt in einer punktierten Umgebung von $x_0 = 0$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1.$$

Daher ist $\sin x = O(x)$ für $x \rightarrow 0$. Weiter ist (2.31) äquivalent mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0,$$

und dafür schreiben wir $\sin x - x = o(x)$ für $x \rightarrow 0$ oder

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Später werden wir sehen, daß sogar gilt

$$\sin x = x + O(x^3) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \tag{2.32}$$

* *Aufgabe 2.7:* Was bedeutet Formel (2.32) definitionsgemäß?

3. Stetigkeit

3.1. Der Begriff der Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 will man die Vorstellung, daß das Bild von f an dieser Stelle „nicht abreißt“ (Bild 3.1), mathematisch einfangen. Es ist naheliegend, dazu den Grenzwert von f für $x \rightarrow x_0$ mit dem Funktionswert $f(x_0)$ zu vergleichen. Demnach muß f außer in einer punktierten Umgebung von x_0 nun auch an der Stelle x_0 selbst, also in einer vollen Umgebung von x_0 , definiert sein.

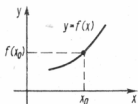


Bild 3.1

Definition 3.1: Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.1)$$

Führt man durch die Substitution $x = x_0 + h$ die neue unabhängige Variable h ein, so kann man für (3.1) offenbar auch schreiben

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0). \quad (3.2)$$

Beispiel 3.1: Nach (2.29) gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0,$$

folglich ist $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = 0$ stetig.

Beispiel 3.2: Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} & \text{für } x \neq \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

gilt (s. Beispiel 2.3)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1 \neq 2 = f\left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Daher ist f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ nicht stetig (s. Bild 2.5). Für jedes $x \neq \frac{1}{2}$ ist f offenbar stetig.

Unter Beachtung der Definition des Grenzwertes einer Funktion erhält man die folgende ausführliche Formulierung von Definition 3.1:

D. 3.1* Definition 3.1*: Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn für jede Folge (x_n) in $D(f)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Die „ ε - δ -Charakterisierung“ des Grenzwertes einer Funktion (s. Satz 2.1) liefert eine entsprechende Charakterisierung der Stetigkeit:

S. 3.1 Satz 3.1: Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Genau dann ist f an der Stelle x_0 stetig, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$.

Zur Veranschaulichung dieses Satzes ist in Bild 2.7 nur g durch $f(x_0)$ zu ersetzen. Auf Grund von Satz 3.1 wollen wir den Begriff der Stetigkeit noch an einem Beispiel aus der Physik interpretieren.

Beispiel 3.3: Die geradlinige Bewegung einer Punktmasse wird durch die Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ ²⁾ beschrieben. Zur Zeit t_0 befindet sich die Punktmasse also am Ort $s(t_0)$; diesem Ort wird sie noch beliebig nahe sein, wenn man sie nur zu einer Zeit t beobachtet, die hinreichend nahe bei t_0 gelegen ist (s. Bild 3.2). Mathematisch bedeutet das: Die Funktion $s = s(t)$ ist an der (beliebigen) Stelle t_0 stetig.

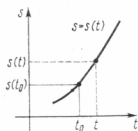


Bild 3.2

Beispiel 3.4: Unter Verwendung des Satzes 3.1 wollen wir zeigen, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an jeder Stelle x_0 stetig ist. Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$, falls $\delta = \varepsilon$ gesetzt wird. Damit ist zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $\delta > 0$ gefunden, also die Behauptung bewiesen, d. h., es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0| \quad (x_0 \text{ beliebig}). \quad (3.4)$$

Beispiel 3.5³⁾: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } \frac{1}{k+1} < |x| \leq \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

¹⁾ Die Voraussetzung „ $x_n \neq x_0$ für alle n “ ist jetzt offenbar entbehrlich.

²⁾ In den Anwendungen bezeichnet man häufig die abhängige Variable und das Funktionssymbol mit demselben Buchstaben (hier s).

³⁾ Dieses Beispiel ist [10] entnommen.

soll auf Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ untersucht werden. Offenbar gilt

$$0 \leq f(x) \leq |x| \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (3.5)$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$ (letzteres nach (3.4) mit $x_0 = 0$) folgt aus (3.5) nach Satz 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Da auch $f(0) = 0$ gilt, ist f an der Stelle $x = 0$ stetig. Das Bild von f besteht aus zur x -Achse parallelen Geradenstücken, die für $x \rightarrow 0$ immer kürzer werden und der x -Achse immer näher kommen (Bild 3.3). Das Verhalten von f in einer (sehr kleinen) Umgebung von $x = 0$ ist anschaulich nur unvollkommen zu erfassen. Dieses Beispiel zeigt also, daß der durch Definition 3.1 exakt festgelegte Begriff der Stetigkeit doch wesentlich über das der Anschauung Zugängliche hinausreicht.

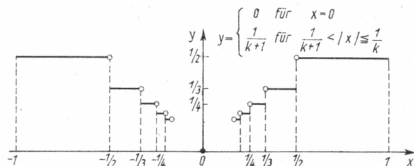


Bild 3.3

3.2. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit auf einem Intervall

Unter Verwendung der einseitigen Grenzwerte definiert man die einseitige Stetigkeit.

Definition 3.2: Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0, x_0 + c]$, $c > 0$, definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Für Funktionen, die in einem Intervall $[x_0 - c, x_0]$, $c > 0$, erklärt sind, ist entsprechend die linksseitige Stetigkeit an der Stelle x_0 durch die Forderung

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

definiert.

Aus Satz 2.2 folgt unmittelbar der

Satz 3.2: Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn sie dort sowohl linksseitig als auch rechtsseitig stetig ist.

Beispiel 3.6: Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{für } 0 < x \leq 3, \\ x - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

gilt (vgl. Beispiel 2.8) $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 1 = f(3)$, folglich ist f an der Stelle $x = 3$ linksseitig stetig. Wegen $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 2 \neq f(3)$ ist f an der Stelle $x = 3$ nicht rechtsseitig stetig, also erst recht nicht stetig.

Die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 ist eine „lokale“ Eigenschaft. Wir definieren nun die „globale“ Eigenschaft der Stetigkeit auf einem Intervall.

D. 3.3 Definition 3.3: Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt auf I stetig, wenn gilt:

1. f ist in jedem inneren Punkt von I stetig.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I , dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) stetig.

Beispiel 3.7: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, +\infty)$) ist in jedem $x_0 \in (0, +\infty)$ stetig [s. (2.10)] und in $x_0 = 0$ rechtsseitig stetig [s. (2.12)], also auf dem Intervall $[0, +\infty)$ stetig.

- * **Aufgabe 3.1:** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Stetigkeit bzw. einseitige Stetigkeit an den angegebenen Stellen x_0 .

a) $f(x) = x^2$, x_0 beliebig.

b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ (vgl. Beispiel 3.1).

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x < 0, \\ 2x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Hinweis zu d): Benutzen Sie Satz 3.1.

3.3. Unstetigkeitsstellen und ihre Klassifikation

Ist die Funktion f (mindestens) in einer punktierten Umgebung der Stelle x_0 definiert, aber an dieser Stelle nicht stetig, dann heißt x_0 *Unstetigkeitsstelle von f* . Aus der Definition der Stetigkeit ergibt sich, daß für jede Unstetigkeitsstelle x_0 von f genau einer der folgenden fünf Fälle vorliegt.

Fall 1: Der Grenzwert $g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, ist aber von $f(x_0)$ verschieden, sofern f an der Stelle x_0 überhaupt definiert ist.

Setzt man

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \quad (x \in D(f)), \\ g & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

so ist die Funktion f^* wegen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g = f^*(x_0)$$

an der Stelle x_0 stetig (s. Bild 3.4a, 3.4b). Die Unstetigkeit von f an dieser Stelle ist damit „behoben“. Daher heißt x_0 in diesem Fall *hebbare Unstetigkeitsstelle* der Funktion f .

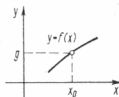


Bild 3.4a

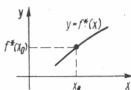


Bild 3.4b

Beispiel 3.8: Für die in Beispiel 3.2 betrachtete Funktion f ist $x = \frac{1}{2}$ wegen (3.3) eine hebbare Unstetigkeitsstelle und die Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases} = x + \frac{1}{2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

eine stetige „Ersatzfunktion“.

In Verallgemeinerung dieses Beispiels sei nun f eine gebrochen rationale Funktion sowie x_0 eine m -fache Nullstelle des Zählerpolynoms und zugleich eine n -fache Nullstelle des Nennerpolynoms (also x_0 eine *Lücke* von f , s. Band 1, Abschnitt 9.5.). Die Funktion f ist somit in der Form

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^m p(x)}{(x - x_0)^n q(x)} \quad (x \neq x_0)$$

darstellbar, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, die an der Stelle $x = x_0$ nicht verschwinden.

Ist nun $m \geq n$, dann ist x_0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle von f und

$$f^*(x) = \frac{(x - x_0)^{m-n} p(x)}{q(x)} \quad (x = x_0 \text{ zugelassen})$$

eine an der Stelle x_0 stetige „Ersatzfunktion“ für f . Die Unstetigkeit von f an der Stelle x_0 kann in diesem Falle also durch Kürzen des Faktors $(x - x_0)^n$ „behoben“ werden.

Ist dagegen $m < n$, so zeigt die Darstellung

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - x_0)^{n-m} q(x)} \quad (x \neq x_0),$$

daß f sich in einer Umgebung von x_0 wie in einer Umgebung einer Polstelle der Ordnung $n - m$ verhält. Hierauf kommen wir in den Fällen 3 und 4 zurück.

Fall 2: Die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ existieren, sind aber voneinander verschieden. In diesem Fall heißt x_0 *Sprungstelle von f mit endlichem Sprung*.

Wir verweisen hier auf die in Beispiel 2.8 betrachtete Funktion f , die an der Stelle $x = 3$ einen endlichen Sprung hat. Weiter betrachten wir das

Beispiel 3.9: Die Wärmeleitfähigkeit einer Substanz ist im allgemeinen temperaturabhängig und ändert sich beim Übergang in einen anderen Aggregatzustand sprunghaft. Bild 3.5 zeigt die spezifische Wärmeleitfähigkeit λ von Quecksilber in Abhängigkeit von der Temperatur T ¹⁾. Im sog. Schmelzpunkt $T_{sm} \approx 234,29 \text{ K}$ ($\approx -38,86^\circ \text{C}$)

¹⁾ Siehe Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Bd. 1, Seite 345 (23. Auflage), BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1981.

hat die Funktion $\lambda = \lambda(T)$ einen endlichen Sprung. An der Stelle T_{sm} ist diese Funktion nicht definiert, da sich dort feste und flüssige Phase im Gleichgewicht befinden.

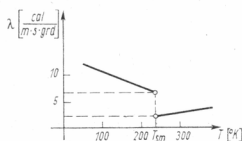


Bild 3.5

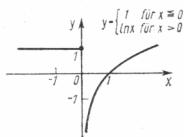


Bild 3.6

Fall 3: Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$. In diesem Fall nennt man x_0 *Unendlichkeitsstelle von f*.

Ein Beispiel hierfür ist jede Polstelle gerader Ordnung bei einer gebrochen rationalen Funktion (s. Band 1, 9.5), so die zweifache Polstelle $x = 0$ der Funktion $f(x) = x^{-2}$ (s. Beispiel 2.12 und Bild 2.12).

Fall 4: Die Funktion f ist für eine der beiden „Bewegungen“ $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) und für die andere „Bewegung“ konvergent oder bestimmt divergent gegen $-\infty$ (bzw. $+\infty$). In diesem Fall heißt x_0 *Sprungstelle von f mit unendlichem Sprung*.

Eine gebrochen rationale Funktion hat an jeder Polstelle ungerader Ordnung einen unendlichen Sprung, so die in Beispiel 2.17 untersuchte Funktion an der einfachen Polstelle $a = f$ (s. Bild 2.15). Weiter betrachten wir das

Beispiel 3.10: Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ \ln x & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

gilt (s. Beispiel 2.13)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 1 = 1.$$

Daher ist $x = 0$ eine Sprungstelle von f mit unendlichem Sprung (s. Bild 3.6).

Fall 5: Für mindestens eine der beiden „Bewegungen“ $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$ ist f unbestimmt divergent. In diesem Falle nennt man x_0 *oszillatorische Unstetigkeitsstelle von f*.

Ein Beispiel für eine oszillatorische Unstetigkeitsstelle ist die Stelle $x = 0$ für die in Beispiel 2.4 betrachtete Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

Diese Klassifizierung der Unstetigkeitsstellen gestattet eine Abschwächung des Begriffs der Stetigkeit auf einem Intervall. Eine Funktion f heißt *auf einem Intervall I stückweise stetig*, wenn sie im Inneren von I bis auf höchstens endlich viele hebbare Unstetigkeitsstellen oder endliche Sprünge stetig ist und in jedem zu I gehörigen Randpunkt noch der jeweilige einseitige Grenzwert von f existiert.

Die Funktionen der Beispiele 3.5 und 3.10 sind auf $[-1, 1]$ nicht stückweise stetig: Erstere ist zwar bis auf die endlichen Sprünge bei $x = \pm \frac{1}{k}$ ($k = 2, 3, \dots$) stetig (s. Bild 3.3), aber die Anzahl dieser Sprungstellen ist nicht endlich; die zweite Funk-

tion hat dagegen bei $x = 0$ einen unendlichen Sprung. In der Praxis treten jedoch häufig stückweise stetige Funktionen auf.

Beispiel 3.11: Ein Radarimpuls läßt sich durch eine periodische Zeitfunktion der Form

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } (2k-1)l \leq t < 2kl \\ c & \text{für } 2kl \leq t < (2k+1)l \end{cases} \quad (c, l > 0; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

beschreiben (s. Bild 3.7). Diese Funktion ist auf jedem beschränkten Intervall I stückweise stetig.

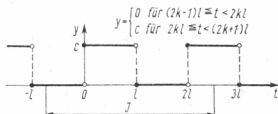


Bild 3.7

Aufgabe 3.2: Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen x_0 der folgenden Funktionen f , und geben Sie im Falle einer hebbaren Unstetigkeitsstelle eine an der Stelle x_0 stetige „Ersatzfunktion“ f^* für f an.

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\infty < x < +\infty), \quad x_0 = 0.$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (x \neq -1), \quad x_0 = -1.$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ -1 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

d) $f(x) = -\frac{x-3}{(x-3)^5} \quad (x \neq 3), \quad x_0 = 3.$

e) $f(x) = \cot x \quad (-\pi < x < \pi, x \neq 0), \quad x_0 = 0.$

Hinweis zu e) Verwenden Sie (2.28) und (2.29)

3.4. Eigenschaften stetiger Funktionen

3.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen

Satz 3.3: Ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig und $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) < 0$), dann gibt es eine Umgebung von x_0 , so daß auch noch für alle x dieser Umgebung $f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) gilt.

In Bild 3.8 haben wir diesen Satz für den Fall $f(x_0) > 0$ veranschaulicht.

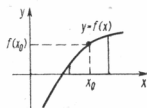


Bild 3.8

S. 3.4 Satz 3.4: Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 stetig. Dann sind die Funktionen

$$f + g, \quad c \cdot f \quad (c \text{ eine Konstante}) \quad \text{und} \quad f \cdot g$$

an der Stelle x_0 stetig. Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 stetig.

Satz 3.4 folgt unmittelbar aus Satz 2.3. (Die im Zusammenhang mit der Funktion f/g getroffene Voraussetzung $g(x_0) \neq 0$ sichert nach Satz 3.3 bereits, daß die Funktion g in einer ganzen Umgebung von x_0 nicht verschwindet.)

Bemerkung 3.1: Satz 3.4 bleibt richtig, wenn „stetig“ überall durch „rechtsseitig stetig“ oder durch „linksseitig stetig“ ersetzt wird.

S. 3.5 Satz 3.5: Ist die Funktion¹⁾ $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ stetig, dann ist die mittelbare Funktion $f(g(x))$ an der Stelle $x = x_0$ stetig.

Beispiel 3.12: Die Funktion $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$) ist nach Satz 3.5 an der Stelle $x = 0$ stetig, da die Funktion $g_1(x) = \cos x$ an der Stelle $x = 0$ und die Funktion $f_1(z) = \sqrt{z}$ an der Stelle $z = \cos 0 = 1$ stetig ist (s. Beispiel 3.1 und 3.7).

Bemerkung 3.2: Wir wollen diese Gelegenheit zu einigen Andeutungen über eine moderne Betrachtungsweise in der Mathematik benutzen.

Für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ bezeichne

$$C[a, b]$$

die Menge aller auf $[a, b]$ stetigen Funktionen. Statt „ f ist eine auf $[a, b]$ stetige Funktion“ können wir also auch kurz $f \in C[a, b]$ schreiben.

So ist z. B. die durch $f(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) definierte Funktion f auf $[0, 1]$ stetig, d. h., es gilt $f \in C[0, 1]$.

Nun sei $f \in C[a, b]$, $g \in C[a, b]$ und c eine reelle Zahl. Nach Satz 3.4 ist dann auch $f + g \in C[a, b]$ und $c \cdot f \in C[a, b]$. Wendet man also die Operationen der Addition und der Multiplikation mit einer reellen Zahl auf Elemente der Menge $C[a, b]$ an, so erhält man stets wieder Elemente von $C[a, b]$. Mit diesen Operationen versehen, ist daher die Menge $C[a, b]$ ein linearer Raum (s. Band 1, Abschnitt 7.7.²⁾).

Mit den Elementen der Menge $C[a, b]$ kann man also in ähnlicher Weise „rechnen“ wie mit reellen Zahlen. Insbesondere kann man auch Gleichungen in $C[a, b]$ betrachten. Die „Unbekannten“ sind dann nicht Zahlen, sondern Funktionen. In Abschnitt 4.7.2. kommen wir hierauf zurück.

3.4.2. Stetigkeit der elementaren Funktionen

Als *elementare Funktion* bezeichnet man bekanntlich jede Funktion, die sich aus den Grundfunktionen (Konstanten, Potenz-, Exponential-, Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen) durch Anwendung der rationalen Rechenoperationen und Bildung mittelbarer Funktionen in endlich vielen Schritten erzeugen läßt (s. Band 1, Abschnitt 9.5.).

¹⁾ Um die Bezeichnung der unabhängigen Variablen hervorzuheben, haben wir die Funktionen hier mit $g(x)$ bzw. $f(z)$ statt mit g bzw. f bezeichnet.

²⁾ Man beachte, daß die von den Operationen geforderten Eigenschaften, wie z. B. $f + g = g + f$, sogar für beliebige, auf $[a, b]$ definierte Funktionen erfüllt sind.

Beispiel 3.13: Die Funktion

$$f_1(x) = \frac{4 \ln(x-1)}{x^2+3} - x^3 e^{\cos x} \quad (x > 1)$$

ist elementar, die durch „Aneinanderfügen“ von Grundfunktionen gebildete Funktion

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ \ln x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

dagegen nicht.

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Stetigkeit einiger Grundfunktionen – wenigstens an gewissen Stellen x_0 – nachgewiesen (s. Beispiele 3.1 und 3.7 sowie Aufgaben 3.1 a) und b)). Ohne Beweis teilen wir mit, daß sogar alle Grundfunktionen auf jedem Intervall ihres Definitionsbereichs stetig sind. Wie in Beispiel 3.12 kann man daraus unter Verwendung der Sätze 3.4 und 3.5 nun schließen, daß allgemein der folgende Satz gilt:

Satz 3.6: Jede elementare Funktion ist auf jedem Intervall ihres Definitionsbereichs S. 3.6 stetig.

Eine nichtelementare Funktion braucht diese Eigenschaft natürlich nicht zu haben, wie man etwa an der Funktion f_2 von Beispiel 3.13 sieht (vgl. Beispiel 3.10). Satz 3.6 kann häufig zur Berechnung von Grenzwerten von Funktionen und Folgen herangezogen werden.

Beispiel 3.14: Es soll der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (5|x-2| + \cosh \sqrt{x-1})$$

berechnet werden. Als elementare Funktion¹⁾ ist

$$f(x) = 5|x-2| + \cosh \sqrt{x-1} \quad (x \geq 1)$$

nach Satz 3.6 auf $[1, +\infty)$ stetig, also insbesondere an der Stelle $x = 1$ rechtsseitig stetig. Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 5|-1| + \cosh 0 = 6.$$

Beispiel 3.15: Gesucht ist der Grenzwert

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \arctan \frac{n}{n+1}.$$

Die elementare Funktion

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

ist nach Satz 3.6 auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ stetig; die durch

$$x_n = \frac{n+1}{n}$$

definierte Folge (x_n) und ihr Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ liegen im Intervall $(0, +\infty)$. Dar-

¹⁾ Wegen $|x| = \sqrt{x^2}$ ist $\varphi(x) = |x|$ eine elementare Funktion.

aus folgt (s. Definition 3.1*)

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = 1 \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

* **Aufgabe 3.3:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\cos x} + \tan 2x), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin x}{x^2 + 1},$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n+3}}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right].$$

* **Aufgabe 3.4:** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit an den angegebenen Stellen x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \leq 0, \\ \cos x & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{für } x < 2, \\ |x-3| & \text{für } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

3.4.3. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt werden Funktionen betrachtet, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig sind. Diese Funktionen haben eine Reihe von Eigenschaften, die man in Anbetracht der Vorstellung, daß ihre Bildkurve „nicht abreißt“, auch von ihnen „erwartet“.

Es sei daran erinnert (s. Band 1), daß die Funktion f auf dem Intervall $I \subset D(f)$ beschränkt heißt, wenn es eine positive Zahl c gibt, so daß gilt

$$|f(x)| \leq c \quad \text{für alle } x \in I.$$

S. 3.7 Satz 3.7: Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt.

Die Voraussetzung der Abgeschlossenheit des betrachteten Intervalls ist für die Gültigkeit von Satz 3.7 wesentlich.

Beispiel 3.16: Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 1)$$

ist auf dem (nicht abgeschlossenen!) Intervall $(0, 1]$ stetig, aber wegen $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$ nicht beschränkt.

Im Hinblick auf den nächsten Satz geben wir die

D. 3.4 Definition 3.4: Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert. Eine Stelle $x_0 \in I$ heißt Stelle des absoluten (oder globalen) $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximums} \\ \text{Minimums} \end{smallmatrix} \right\}$ von f auf I , wenn gilt

$$\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt dabei absolutes (oder globales) $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{smallmatrix} \right\}$ von f auf I .

Statt „Stelle des absoluten Maximums“ sagt man auch kurz „**absolute Maximum-stelle**“ oder „**absolute Maximalstelle**“, analog für das Minimum. Absolute Maxima und Minima gemeinsam nennt man **absolute Extremwerte** oder **absolute Extremalwerte**. Jede Stelle, an der ein absoluter Extremwert angenommen wird, heißt kurz **absolute Extremalstelle**.

Das absolute Maximum (Minimum) von f auf I ist also der größte (kleinste) Wert, den f auf I annimmt.

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann besitzt die Menge

$$M = \{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

wegen Satz 3.7 eine endliche untere Grenze m_1 und eine endliche obere Grenze m_2 (s. Band 1). Man kann nun zeigen, daß die Zahlen m_1 und m_2 zu M gehören, also ebenfalls Funktionswerte sind. Natürlich ist dann m_1 das absolute Minimum und m_2 das absolute Maximum von f auf $[a, b]$. Es gilt also der wichtige

Satz 3.8 (Satz von Weierstraß¹⁾): Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion hat dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. S. 3.8

Beispiel 3.17: Die stetige Funktion $f(x) = \sin x$ hat auf dem Intervall $[0, \pi]$ das absolute Maximum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und das absolute Minimum $f(0) = f(\pi) = 0$ ²⁾. Auf dem (nicht abgeschlossenen!) Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right)$ hat f kein absolutes Minimum, da die untere Grenze $m_1 = -1$ des Wertevorrats von f nicht Funktionswert ist (s. Bild 3.9).

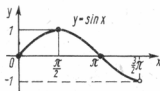


Bild 3.9

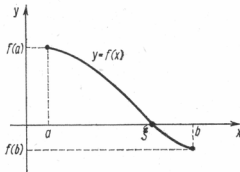


Bild 3.10

Satz 3.9 (Satz von Bolzano³⁾): Ist die Funktion f auf $[a, b]$ stetig und haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen, dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$. S. 3.9

In Bild 3.10 haben wir die Aussage von Satz 3.9 für den Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ illustriert. Dieser Satz liefert eine einfache Methode zur Ermittlung von Intervallen, in denen eine Gleichung der Form

$$f(x) = 0$$

eine Lösung ξ besitzt.

¹⁾ Karl Weierstraß (1815–1897), deutscher Mathematiker.

²⁾ Ein absoluter Extremwert kann also auch an mehreren Stellen angenommen werden.

³⁾ Bernard Bolzano (1781–1848), Mathematiker, wirkte in Prag.

Beispiel 3.18: Gesucht ist ein (möglichst kleines) Intervall, welches eine positive Lösung ξ der Gleichung

$$10^x - x - 2 = 0 \quad (3.6)$$

enthält.

Als elementare Funktion ist $f(x) = 10^x - x - 2$ stetig. Wegen

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0, \\ f(1) &= 7 > 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

liegt nach Satz 3.9 also mindestens eine Lösung von (3.6) im Intervall $(0, 1)$. Der Funktionswert im Mittelpunkt dieses Intervalls ist

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{10} - \frac{5}{2} \stackrel{1)}{=} 0,66 > 0. \quad (3.8)$$

Aus (3.7) und (3.8) folgt, wiederum nach Satz 3.9, genauer, daß (3.6) eine Lösung ξ mit $0 < \xi < \frac{1}{2}$ besitzt. Durch fortgesetzte Intervallhalbierung könnte man ξ sogar beliebig genau eingrenzen. Zur praktischen Ermittlung eines Näherungswertes für ξ ist dieses Vorgehen allerdings nicht geeignet, da es zu viele Rechenschritte erfordert. In 7.7. werden wir wesentlich effektivere Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen behandeln.

Offenbar kann man Satz 3.9 auch so formulieren: Die zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ gelegene Zahl 0 ist selbst Funktionswert. Diese Aussage läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig, dann ist jede zwischen zwei voneinander verschiedenen Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ ($a, b \in I$) gelegene Zahl ebenfalls Funktionswert. Mit anderen Worten: Das Intervall $f(a) \dots f(b)$ wird von den Werten der Funktion f „lückenlos ausgefüllt“. Es gilt also der

S. 3.10 Satz 3.10: Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Dann ist ihr Wertevorrat, also die Menge $\{f(x) : x \in I\}$, ebenfalls ein Intervall²⁾.

Es sei betont, daß das Intervall I dabei nicht abgeschlossen und auch nicht beschränkt zu sein braucht.

* **Aufgabe 3.5:** Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x \cdot \lg x - 1 = 0$$

im Intervall $(2,3)$ mindestens eine Lösung hat.

* **Aufgabe 3.6:** Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

a) Notieren Sie den Wertevorrat von f .

b) Vergleichen Sie das Ergebnis von a) mit Satz 3.10.

¹⁾ Hier und im folgenden setzen wir, wie üblich, zwischen exakten Wert und gerundeten Dezimalwert das Gleichheitszeichen.

²⁾ Ist $f(x) = c$ für alle $x \in I$, also f auf I konstant, dann entartet der Wertevorrat von f zu der elementar Menge $\{c\} = [c, c]$.

3.4.4. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Wir erinnern daran, daß eine auf einem Intervall I definierte Funktion f *eindeutig* oder *umkehrbar eindeutig* heißt, wenn es zu jedem y aus dem Wertevorrat von f genau ein $x \in I$ mit

$$f(x) = y \quad (3.9)$$

gibt. Jede eineindeutige Funktion f besitzt eine *Umkehrfunktion* f^{-1} , deren Gleichung man durch Auflösung von (3.9) nach x erhält:

$$x = f^{-1}(y).$$

Ist die Funktion f auf I außerdem stetig, dann ist der Wertevorrat von f , also der Definitionsbereich von f^{-1} , nach Satz 3.10 ein Intervall I^* (s. Bild 3.11). Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Stetigkeit von f^{-1} auf I^* .

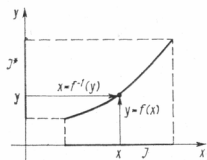


Bild 3.11

Satz 3.11: Die Funktion f sei auf einem Intervall *eindeutig und stetig*. Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Wertevorrat von f , der ebenfalls ein Intervall ist, *stetig*. **S. 3.11**

Jede streng monotone Funktion ist bekanntlich *eindeutig*. Wir erwähnen, daß für stetige Funktionen hiervon auch die Umkehrung gilt. Eine stetige Funktion besitzt also genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie *streng monoton* ist.

Beispiel 3.19: Die Funktion

$$f: y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ stetig und streng monoton wachsend; sie hat dort

also das absolute Minimum $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und das absolute Maximum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Nach Satz 3.10 ist daher ihr Wertevorrat das Intervall $[-1, 1]$. Auf diesem Intervall besitzt sie eine stetige Umkehrfunktion, nämlich

$$f^{-1}: x = \arcsin y \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

bzw.

$$f^{-1}: y = \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

4. Ableitungen

4.1. Vorbemerkungen

Zur Vorbereitung auf den Ableitungsbegriff betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 4.1: Geschwindigkeit einer Bewegung. Ist der Weg s , den ein Massenpunkt bei einer geradlinigen Bewegung zurücklegt, der benötigten Zeit t direkt proportional, also

$$s = vt \quad (v \text{ eine Konstante}),$$

dann bezeichnet man den konstanten Quotienten

$$\frac{s}{t} = v \quad (4.1)$$

als Geschwindigkeit der Bewegung. Im allgemeinen Fall ist das Weg-Zeit-Gesetz einer geradlinigen Bewegung durch eine Funktion

$$s = s(t) \quad (4.2)$$

gegeben (z. B. $s = \frac{1}{2}gt^2$ beim freien Fall). Es erhebt sich die Frage, wie nun die Geschwindigkeit zu definieren ist. In einem Zeitintervall von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ legt der Massenpunkt gemäß (4.2) den Weg

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

zurück. Daher wird man in Analogie zu (4.1) den Quotienten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

als *mittlere Geschwindigkeit* (Durchschnittsgeschwindigkeit) der Bewegung in dem betrachteten Zeitintervall bezeichnen. Es ist nun naheliegend, den Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(falls er existiert) als *momentane Geschwindigkeit* $v(t_0)$ der durch (4.2) gegebenen Bewegung zur Zeit t_0 zu bezeichnen:

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Beispiel 4.2: Elastizität einer Ursache-Wirkung-Beziehung. Eine ökonomische Größe y (z. B. der Energieverbrauch) sei eine Funktion f einer anderen ökonomischen Größe x (z. B. des Produktionsvolumens): $y = f(x)$. Eine Änderung der Ursache x um einen Wert Δx hat dann die Wirkungsänderung $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ zur Folge.

Man bezeichnet nun den Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

als *durchschnittliche (absolute) Elastizität* im Intervall $x \dots x + \Delta x$ und den Grenzwert

$$\varphi(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.6)$$

(falls er existiert) als (*absolute*) *Elastizität* der betrachteten Ursache-Wirkung-Beziehung $y = f(x)$ an der „Stelle“ x .

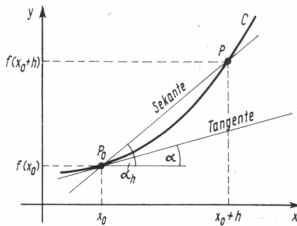


Bild 4.1

Beispiel 4.3: Anstieg einer Kurve. Gegeben sei eine Kurve C als Bild einer stetigen Funktion f (Bild 4.1). Den Anstieg der Sekante durch zwei Kurvenpunkte

$$P_0(x_0, f(x_0)), \quad P(x_0 + h, f(x_0 + h)),$$

also

$$\tan \alpha_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

kann man als *mittleren Anstieg* von C im Intervall $x_0 \dots x_0 + h$ ansehen. Als *Anstieg* von C im Punkt P_0 wird man daher den Grenzwert

$$\tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \tan \alpha_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.7)$$

bezeichnen, sofern dieser Grenzwert existiert. Die Gerade durch P_0 mit diesem Anstieg heißt *Tangente an die Kurve C im Punkt P_0* . Anschaulich gesprochen ist die Tangente also die Gerade, in die die Sekante übergeht, falls P auf C gegen P_0 „strebt“. (In 2.1.1., Beispiel 2.1, haben wir diese Überlegungen schon einmal für den speziellen Fall $f(x) = x^2$, $x_0 = \frac{1}{2}$ angestellt.)

4.2. Der Begriff der Ableitung

4.2.1. Definition der Ableitung

Die Beispiele des vorigen Abschnittes gingen von sehr unterschiedlichen Fragestellungen aus. Sie führten aber stets zu denselben mathematischen Überlegungen, die wir – in den Bezeichnungen von Beispiel 4.3 – noch einmal zusammenstellen wollen.

Gegeben sei eine Funktion f , die in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert ist. Ferner sei $h \neq 0$ eine Zahl, für die auch noch $x_0 + h$ in dieser Umgebung von x_0 liegt. Zur Argumentdifferenz

$$\Delta x := (x_0 + h) - x_0 = h \quad (4.8)$$

kann man dann die Funktionswertdifferenz

$$\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (4.9)$$

bilden. Der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0) \quad (4.10)$$

heißt *Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0* . Für festes x_0 ist die rechte Seite von (4.10) eine Funktion von h ,

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (4.11)$$

die in einer punktierten Umgebung von $h = 0$ definiert ist. Die Beispiele des vorigen Abschnittes lenken nun unsere Aufmerksamkeit auf den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (4.12)$$

D. 4.1 Definition 4.1: Die in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt **an der Stelle x_0 differenzierbar**, wenn der Grenzwert (4.12) existiert. Dieser Grenzwert heißt **1. Ableitung oder Ableitung 1. Ordnung der Funktion f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, also

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (4.13)$$

Mit Δx statt h kann man für (4.13) auch

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (4.14)$$

schreiben. Eine weitere Schreibweise erhält man mit $x = x_0 + h$, also $x \rightarrow x_0$ statt $h \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.15)$$

Für die 1. Ableitung $f'(x_0)$ sind auch die Symbole

$$y' \Big|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

und die Bezeichnung *Differentialquotient 1. Ordnung von f an der Stelle x_0* üblich.

Man beachte, daß den Symbolen dy und dx in $\frac{dy}{dx}$ (lies „ dy nach dx “) zunächst keine selbständige Bedeutung zukommt.

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion nennt man *Differentiation*.

4.2.2. Bedeutung der Ableitung

Das Beispiel 4.3 gestattet eine geometrische Deutung der 1. Ableitung einer an der Stelle x_0 differenzierbaren Funktion f : Mit den dort eingeführten Bezeichnungen ist

$$\tan \alpha = f'(x_0) \quad (4.16)$$

der Anstieg der Bildkurve C von f sowie der Tangente an C im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangente hat also die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (4.17)$$

Betrachten wir noch einmal die Beispiele 4.1 und 4.2. Nach (4.4) gilt¹⁾

$$v(t_0) = \dot{s}(t_0), \quad (4.18)$$

d. h., die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung ist die 1. Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit. Entsprechend ist die (absolute) Elastizität $\varphi(x)$ einer ökonomischen Ursache-Wirkung-Beziehung $y = f(x)$ nach (4.6) die Ableitung $f'(x)$. Auf Grund ähnlicher Überlegungen definiert man auch viele andere Begriffe der Technik, der Naturwissenschaften und der Ökonomie, wie z. B. Induktionsspannung einer Spule, chemische Reaktionsgeschwindigkeit, Wachstumsgeschwindigkeit eines Organismus, Intensität einer Produktion, als 1. Ableitung gewisser Funktionen. Verallgemeinernd kann man die 1. Ableitung einer Funktion als Maß für die „Änderungsgeschwindigkeit“ dieser Funktion ansehen.

Aufgabe 4.1: Fließt durch einen bestimmten Querschnitt eines elektrischen Leiters * eine zeitlich konstante Ladung, so bezeichnet man den Quotienten $\frac{Q}{t}$ als Stromstärke, wobei Q die während der Zeit t durch den Querschnitt fließende Ladungsmenge bedeutet. Nun sei $Q(t)$ die zum Zeitpunkt t durch den Querschnitt fließende Ladungsmenge (diese sei jetzt also zeitabhängig). Definieren Sie für diesen Fall in sinnvoller Weise die mittlere Stromstärke in einem Zeitintervall $t_0 \dots t_0 + \Delta t$ und die Stromstärke zur Zeit t_0 .

Aufgabe 4.2: Ein als Gerade (x -Achse) idealisierter Stab sei mit Masse belegt. Ist die * Massenbelegung gleichmäßig (homogener Stab), so bezeichnet man den Quotienten $\varrho = \frac{m}{l}$ als (Linien-) Dichte der Belegung. Dabei ist m die auf die Länge l entfallende Masse. Nun sei der Stab inhomogen und $m(x)$ die im Intervall $[0, x]$ ($x > 0$) gelegene Masse. Geben Sie für diesen Fall eine sinnvolle Definition der mittleren Dichte der Belegung in einem Intervall $x_0 \dots x_0 + \Delta x$ und der Dichte $\varrho(x_0)$ an der Stelle x_0 ($x_0 > 0$).

4.2.3. Beispiele

Wir wollen nun die Ableitung einiger Funktionen an einer beliebigen Stelle x_0 berechnen.

Beispiel 4.4: $f(x) = c$ (c eine Konstante).

Für den Differenzenquotienten von f an der Stelle x_0 gilt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \quad (h \neq 0).$$

Folglich ist auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0,$$

d. h., die Funktion f ist an jeder Stelle x_0 differenzierbar und hat dort die Ableitung

$$f'(x_0) = 0.$$

¹⁾ Die 1. Ableitung nach t bezeichnet man im allgemeinen durch einen Punkt über dem Funktionssymbol (auch dann, wenn t nicht die Zeit bedeutet).

Beispiel 4.5: $f(x) = x^n$ (n eine natürliche Zahl). (4.19)

Wir bilden den Differenzenquotienten von f an der Stelle x_0 und wenden auf $(x_0 + h)^n$ die binomische Formel (s. Band 1) an:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left[x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right] \\ &= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \dots + h^{n-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.$$

Die Funktion f ist somit an jeder Stelle x_0 differenzierbar und hat dort die Ableitung

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1}. \quad (4.20)$$

Speziell erhält man als Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x_0 den Wert

$$f'(x_0) = 2x_0$$

und an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ somit

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad ^1)$$

Die Tangente t an die Parabel $y = x^2$ im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ hat also nach (4.16) den Anstieg $\tan \alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ und daher den Anstiegswinkel $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Nach (4.17) ist

$$y = \frac{1}{4} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \text{also} \quad y = x - \frac{1}{4}.$$

die Gleichung von t (s. Bild 4.2).

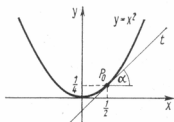


Bild 4.2

Beispiel 4.6: $f(x) = \sin x$. (4.21)

Wir bilden wieder den Differenzenquotienten und formen ihn unter Anwendung eines Additionstheorems um:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} &= \frac{2}{h} \sin \frac{x_0 + h - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + h + x_0}{2} \\ &= \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x_0 + \frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

¹⁾ In der Bezeichnung (4.15) bedeutet das: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = 1$ (vgl. Beispiel 2.2).

Für $h \rightarrow 0$ gilt auch $\frac{h}{2} \rightarrow 0$. Daher ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

[vgl. 2.5. (2.31)]. Ferner gilt wegen der Stetigkeit der Kosinusfunktion

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \cos x_0.$$

Damit folgt aus (4.22)

$$\left. \frac{d \sin x}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0. \quad (4.23)$$

Aufgabe 4.3: Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = \sin x$ in dem Kurvenpunkt mit der Abszisse $x_0 = \frac{3}{4}\pi$.

4.2.4. Einseitige Ableitungen

Mit dem Begriff der einseitigen Grenzwerte definiert man einen entsprechenden Begriff für die Ableitung einer Funktion. Ist eine Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D(f)$ nicht differenzierbar, existiert also der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht, so kann man untersuchen, ob wenigstens einer der einseitigen Grenzwerte existiert.

Definition 4.2: Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0, x_0 + c]$, $c > 0$, definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 rechtsseitig differenzierbar, wenn der rechtsseitige Grenzwert **D. 4.2**

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'_r(x_0)$ bezeichnet. Analog ist die linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 definiert:

$$f'_l(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Aus Satz 2.2 folgt unmittelbar der

Satz 4.1: Die Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn sie dort sowohl rechtsseitig als auch linksseitig differenzierbar ist und $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ gilt. In diesem Falle ist **S. 4.1**

$$f'(x_0) = f'_r(x_0) = f'_l(x_0).$$

Ersetzt man in der Tangentengleichung (4.17) die Ableitung $f'(x_0)$ durch $f'_r(x_0)$ bzw. $f'_l(x_0)$, so erhält man die Gleichung der jeweiligen einseitigen Tangente.

Beispiel 4.7: Die Funktion

$$f(x) = |x^3 - 1| \quad (-\infty < x < +\infty)$$

soll auf (einseitige) Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1$ untersucht werden. Wegen

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{für } x \geq 1, \\ -(x^3 - 1) & \text{für } x < 1, \end{cases}$$

also

$$f(1+h) = \begin{cases} (1+h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3 & \text{für } h \geq 0, \\ -[(1+h)^3 - 1] = -(3h + 3h^2 + h^3) & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

gilt

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \begin{cases} 3 + 3h + h^2 & \text{für } h > 0, \\ -(3 + 3h + h^2) & \text{für } h < 0. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$f'_r(1) = \lim_{h \rightarrow +0} (3 + 3h + h^2) = 3,$$

$$f'_l(1) = \lim_{h \rightarrow -0} [-(3 + 3h + h^2)] = -3.$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 1$ also rechtsseitig und linksseitig differenzierbar, nach Satz 4.1 aber nicht differenzierbar (schlechthin). Die Bildkurve von f hat im Punkt $(1; 0)$ die rechtsseitige Tangente

$$t_r: y = 3(x - 1)$$

und die linksseitige Tangente

$$t_l: y = -3(x - 1).$$

Die Verschiedenheit der einseitigen Ableitungen spiegelt sich in der Bildkurve von f als „Knick“ oder „Spitze“ wider (s. Bild 4.3).

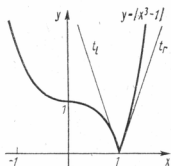


Bild 4.3



Bild 4.4a

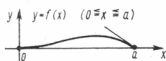


Bild 4.4b

Einseitige Ableitungen treten auch in den Anwendungen auf.

Beispiel 4.8: Ein Balken der Länge a sei an einem Ende eingespannt und am anderen Ende gelenkig gelagert. Greift an dem letztgenannten Ende eine Kraft F in Längsrichtung an, so biegt sich der Balken (s. Bild 4.4a). Nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems kann die Balkenbiegung durch eine Funktion

$$y = f(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

beschrieben werden (s. Bild 4.4b). Diese Funktion ist an der Stelle $x = 0$ rechtsseitig und an der Stelle $x = a$ linksseitig differenzierbar, wobei auf Grund der technischen Vorgaben gilt:

$$f'_r(0) = 0, \quad f'_l(a) \neq 0.$$

Wir betrachten nun noch eine Funktion f , für die an einer Stelle $x_0 \in D(f)$ keine der beiden einseitigen Ableitungen existiert.

Beispiel 4.9: Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

ist für $x < 0$ nicht definiert und daher an der Stelle $x = 0$ nicht linksseitig differenzierbar. Für den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten an dieser Stelle erhält man

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty,$$

so daß f an der Stelle $x = 0$ auch nicht rechtsseitig differenzierbar ist. Man sagt jedoch gelegentlich, f besitze an der Stelle $x = 0$ eine *uneigentliche rechtsseitige Ableitung*, und ihre Bildkurve habe dort eine *vertikale rechtsseitige Tangente* (vgl. Bild 2.8).

Aufgabe 4.4: Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = |x|$ ($-\infty < x < +\infty$) auf einseitige Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$.

4.2.5. Differenzierbarkeit auf einem Intervall

Analog zur Stetigkeit auf einem Intervall definiert man die Differenzierbarkeit einer Funktion auf einem Intervall.

Definition 4.3: Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt **auf I differenzierbar**, wenn gilt: **D. 4.3**

1. f ist in jedem inneren Punkt von I differenzierbar.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I , dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar.

Ist f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion, dann kann man jedem $x \in I$ die Zahl $f'(x)$ zuordnen¹⁾. Durch diese Zuordnung erhält man eine auf I definierte Funktion, die man *Ableitung von f auf I* nennt und mit f' bezeichnet.

Beispiel 4.10: Nach Beispiel 4.5 ist die Funktion f mit

$$f(x) = x^n \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{4.24}$$

auf dem ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$ differenzierbar, und für ihre Ableitung f' gilt

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{4.25}$$

Für (4.24) und (4.25) schreibt man auch kurz

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Analog gilt nach Beispiel 4.6

$$(\sin x)' = \cos x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

¹⁾ Ist x ein Randpunkt von I , dann ist $f'(x)$ durch die entsprechende einseitige Ableitung an dieser Stelle zu ersetzen.

4.3. Differenzierbarkeit und Stetigkeit

S. 4.2 Satz 4.2: Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion f ist dort auch stetig.

Beweis: Es gilt

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \quad (h \neq 0). \quad (4.26)$$

Für $h \rightarrow 0$ existieren nach Voraussetzung die einzelnen Grenzwerte der rechten Seite von (4.26). Daher existiert auch der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$, und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

folglich ist f an der Stelle x_0 stetig [vgl. 3.1., (3.2)]. ■

Umgekehrt braucht eine an der Stelle x_0 stetige Funktion dort nicht differenzierbar zu sein, wie das Beispiel

$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$$

zeigt (vgl. Aufgabe 4.4). Die Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist also eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit von f an dieser Stelle. Eine entsprechende Aussage gilt für den Zusammenhang zwischen einseitiger Stetigkeit und einseitiger Differenzierbarkeit.

4.4. Allgemeine Differentiationsregeln

In diesem Abschnitt behandeln wir Regeln, nach denen man die Ableitung komplizierter Funktionen auf die Ableitungen ihrer einzelnen „Bestandteile“ zurückführen kann.

4.4.1. Ableitung von Summe, Produkt und Quotient

S. 4.3 Satz 4.3: Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $c \cdot f$ (c eine Konstante) und $f \cdot g$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort¹⁾

$$(f + g)' = f' + g', \quad (4.27)$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad (4.28)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{Produktregel}). \quad (4.29)$$

Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel}). \quad (4.30)$$

Beweis der Produktregel (die übrigen Formeln beweist man analog): Mit einem Zuwachs $\Delta x = h \neq 0$ bilden wir den Differenzenquotienten von $f \cdot g$, den wir geeg-

¹⁾ Aus Gründen der Übersichtlichkeit lassen wir in den folgenden Formeln das Argument x_0 weg.

net umformen:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$, also $h \rightarrow 0$, streben die Differenzenquotienten von f bzw. g gegen $f'(x_0)$ bzw. $g'(x_0)$. Da g an der Stelle x_0 stetig ist (s. Satz 4.2), gilt außerdem

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) = g(x_0).$$

Folglich existiert

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x},$$

und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

also die in der Kurzform (4.29) notierte Regel. ■

Wegen

$$(c)' = 0 \quad (4.31)$$

(vgl. Beispiel 4.4) ist (4.28) übrigens ein Spezialfall von (4.29).

Durch vollständige Induktion kann man zeigen, daß (4.27) analog für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden gilt.

In den folgenden Beispielen bilden wir die Ableitung an einer beliebigen Stelle x .

Beispiel 4.11: Für die Funktion $y = \varphi(x) = x^5 - 5x^4 + 6x - 2$ gilt nach (4.27) und (4.28) für alle x

$$y' = (x^5)' - 5(x^4)' + 6(x)' - (2)',$$

also wegen (4.25) und (4.31)

$$y' = 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 + 6 - 0 = 5x^4 - 20x^3 + 6.$$

Beispiel 4.12: Gesucht ist die 1. Ableitung der Funktion

$$y = \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 - 1}. \quad (4.32)$$

Die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 2x - 3 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - 1$$

sind für alle x differenzierbar mit

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad g'(x) = 2x.$$

Ferner ist $g(x) \neq 0$ für alle x mit $|x| \neq 1$. Für diese x ist (4.32) definiert und differenzierbar, wobei nach der Quotientenregel gilt

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{(3x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) - (x^3 - 2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

also

$$y' = \frac{x^4 - x^2 + 6x + 2}{(x^2 - 1)^2} \quad (|x| \neq 1).$$

In Verallgemeinerung der Beispiele 4.11 und 4.12 gilt offenbar: Die Ableitung einer ganzen (bzw. gebrochenen) rationalen Funktion ist wieder eine ganze (bzw. gebrochene) rationale Funktion.

Beispiel 4.13: Für die Funktion $y = x^3 \sin x$ erhält man nach der Produktregel mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sin x$ für alle x

$$y' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

Die Produktregel läßt sich auf den Fall einer beliebigen endlichen Anzahl von Faktoren erweitern. Zum Beispiel erhält man für die Ableitung eines Produkts dreier Funktionen f, g, h durch zweimalige Anwendung von (4.29)

$$\begin{aligned}(fgh)' &= [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h', \\ (fgh)' &= f'gh + fg'h + fgh'.\end{aligned}\tag{4.33}$$

* *Aufgabe 4.5:* Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = 2x^3 - 5x - 3 \sin x + \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\text{b) } f(x) = (x^4 + 4x) \sin x,$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 - \sin x}{2 + \sin x}.$$

* *Aufgabe 4.6:* Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls lautet bekanntlich $s = \frac{g}{2}t^2 + v_0t + s_0$ (g : Erdbeschleunigung, v_0 bzw. s_0 : Geschwindigkeit bzw. Weg zur Zeit $t = 0$). Wie groß ist die Geschwindigkeit dieser Bewegung zu einer beliebigen Zeit $t \geq 0$?

4.4.2. Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel)

S. 4.4 Satz 4.4: Ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ differenzierbar, dann ist die mittelbare Funktion

$$F(x) = f(g(x))$$

an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt die sog. Kettenregel

$$\blacksquare \quad F'(x_0) = f'(z_0) \cdot g'(x_0) \quad \text{mit } z_0 = g(x_0).\tag{4.34}$$

Setzt man

$$y = f(z), \quad z = g(x),$$

dann ist

$$y = f(g(x)) = F(x),$$

und man kann (4.34) in der folgenden einprägsamen Form schreiben¹⁾:

$$\blacksquare \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.\tag{4.35}$$

Beispiel 4.14: Gesucht ist die 1. Ableitung der Funktion

$$y = F(x) = \sin(x^2).\tag{4.36}$$

¹⁾ Die Argumente lassen wir wieder weg.

Wir setzen

$$y = f(z) = \sin z, \quad z = g(x) = x^2$$

und erhalten für jedes z bzw. x

$$\frac{dy}{dz} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = 2x.$$

Daher ist auch (4.36) für jedes x differenzierbar, und es gilt

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \cdot 2x \quad \text{mit} \quad z = x^2,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos(x^2),$$

Die Kettenregel läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß n Funktionen „ineinandergeschachtelt“ sind. Ist z. B.

$$y = f(g(h(x)))$$

und setzt man

$$y = f(z), \quad z = g(w), \quad w = h(x),$$

dann gilt unter entsprechenden Voraussetzungen wie in Satz 4.4 die zu (4.35) analoge Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}. \quad (4.37)$$

Beispiel 4.15: Wir betrachten die Funktion $y = \sin^3(4x^2 - 5)$. Mit

$$y = z^3, \quad z = \sin w, \quad w = 4x^2 - 5,$$

also

$$\frac{dy}{dz} = 3z^2, \quad \frac{dz}{dw} = \cos w, \quad \frac{dw}{dx} = 8x,$$

erhält man nach (4.37) für jedes x

$$\frac{dy}{dx} = 3z^2 \cdot \cos w \cdot 8x = 24x \sin^2(4x^2 - 5) \cos(4x^2 - 5).$$

Aufgabe 4.7: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $y = (2x^3 - 3x + 4 \sin x)^7,$

b) $y = \sin(x^3 + 3x^2 - 8)^4.$

4.4.3. Ableitung der Umkehrfunktion

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der ihrer Umkehrfunktion herstellen. Bild 4.5 zeigt die Bildkurve C einer eindeutigen, differenzierbaren Funktion f (Gleichung: $y = f(x)$). Die Tangente t an C im Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ hat den Anstiegswinkel α . Die Kurve C ist aber zugleich die Bildkurve der Umkehrfunktion f^{-1} (Gleichung: $x = f^{-1}(y)$), wenn man sie „von der y -Achse her“ betrachtet. Dabei ist β der Anstiegswinkel der Tangente t . Es gilt also

$$(f^{-1})'(y_0) = \tan \beta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Nach diesen Überlegungen ist die Gültigkeit des folgenden Satzes, den wir nicht beweisen wollen, anschaulich einleuchtend.

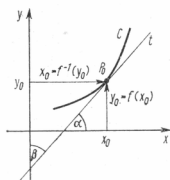


Bild 4.5

S. 4.5 Satz 4.5: Die Funktion f sei eindeutig und in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{mit } y_0 = f(x_0). \quad (4.38)$$

Unter Beachtung der äquivalenten Gleichungen

$$x = f^{-1}(y), \quad y = f(x)$$

kann man (4.38) auch in der suggestiven Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (4.39)$$

schreiben.

Beispiel 4.16: Die Funktion

$$y = f(x) = \sin x \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.40)$$

ist eindeutig und differenzierbar mit

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)' = \cos x \neq 0 \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.41)$$

Ihre Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y \quad (|y| < 1)$$

ist daher ebenfalls differenzierbar, und es gilt nach (4.39) und (4.41)

$$(\arcsin y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x}. \quad (4.42)$$

Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist $\cos x > 0$ und daher

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

so daß aus (4.42) wegen (4.40) folgt

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (|y| < 1).$$

Ersetzt man in der letzten Formel y durch x , so erhält man schließlich

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1). \quad (4.43)$$

4.5. Ableitungen einiger Grundfunktionen

4.5.1. Tabelle der Ableitungen

In der folgenden Tabelle haben wir die Ableitungen einiger Grundfunktionen zusammengestellt. Diese Formeln sind gewissermaßen das „ABC des Differenzierens“; man sollte sie sich daher unbedingt einprägen.

Hinsichtlich der Ableitungen der übrigen Grundfunktionen sei auf einschlägige Formelsammlungen, z. B. [1], verwiesen.

$$(c)' = 0 \quad (c \text{ eine Konstante}) \quad (4.44)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\text{s. Bemerkung 4.1!}) \quad (4.45)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.46)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, -\infty < x < +\infty) \quad (4.47)$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (4.48)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.49)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.50)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ ganz}\right) \quad (4.51)$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad (x \neq k\pi, k \text{ ganz}) \quad (4.52)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \quad (4.53)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.54)$$

Bemerkung 4.1: Formel (4.45) gilt

für alle x , falls α eine natürliche Zahl ist,

für alle $x \neq 0$, falls α eine negative ganze Zahl ist,

für alle $x > 0$, falls α eine beliebige reelle Zahl ist.

Bemerkung 4.2: Formel (4.47) geht für $a = e$ über in (4.46), und aus (4.48) folgt speziell

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Bemerkung 4.3: Von Nutzen ist gelegentlich auch die Formel

$$|x|' = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

4.5.2. Beweis der Formeln von 4.5.1.

Die Formeln (4.44), (4.49) und (4.53) haben wir bereits bewiesen (Beispiele 4.4, 4.6 und 4.16). Ferner haben wir (4.45) für den Fall bewiesen, daß $\alpha = n$ eine natürliche Zahl ist (Beispiel 4.5). Nun sei $\alpha = -n$ eine negative ganze Zahl. Dann gilt nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{-n-1} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

also ebenfalls (4.45). Auf den Beweis von (4.45) für beliebiges α kommen wir weiter unten zu sprechen.

Zum Beweis von (4.48) betrachten wir zunächst den Fall, daß $x > 0$ ist. Dann gilt $|x| = x$, also

$$\ln |x| = \ln x \quad (x > 0).$$

Mit einem Zuwachs $h \neq 0$, für den auch noch $x + h > 0$ ist, bilden wir den Differenzenquotienten von $f(x) = \ln x$ an der Stelle x , den wir mit x erweitern und nach den Logarithmengesetzen umformen:

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}.$$

Setzt man $\frac{h}{x} = t$, dann gilt $t \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

[s. (2.7)] und der Stetigkeit von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = e$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Nun sei $x < 0$, also

$$y = \ln |x| = \ln(-x) \quad (x < 0).$$

Wir setzen

$$y = \ln z, \quad z = -x.$$

Wegen $x < 0$ ist $z = -x > 0$, und nach der soeben bewiesenen Formel (sowie nach (4.45) mit $\alpha = 1$) gilt

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = -1,$$

also nach der Kettenregel

$$[\ln(-x)]' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad (x < 0).$$

Damit ist (4.48) für jedes $x \neq 0$ bewiesen.

Mit (4.48) kann man (4.46) nun leicht beweisen, indem man beachtet, daß $x = e^y$ die Umkehrfunktion von $y = \ln x$ ($x > 0$) ist. Nach (4.39) erhält man

$$(e^y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(\ln x)'} = x = e^y,$$

also (4.46), wenn man y durch x ersetzt.

Zum Beweis von (4.47) schreiben wir

$$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

und setzen

$$y = e^z, \quad z = x \ln a.$$

Dann gilt unter Verwendung bereits bewiesener Regeln

$$\frac{dy}{dz} = e^z, \quad \frac{dz}{dx} = \ln a,$$

also nach der Kettenregel

$$\frac{dy}{dx} = e^z \cdot \ln a = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Entsprechend kann man nun (4.45) für beliebiges α beweisen, indem man gemäß

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

umformt und die Kettenregel anwendet.

Aus der bereits bewiesenen Formel (4.49) folgt (4.50) wegen

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ebenfalls mit der Kettenregel.

Zum Beweis von (4.51) bzw. (4.52) wendet man auf

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{bzw.} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

die Quotientenregel an.

Aus (4.51) folgt schließlich (4.54) als Ableitung der Umkehrfunktion.

Die in Bemerkung 4.3 angegebene Formel folgt unmittelbar durch getrennte Betrachtung der Fälle $x > 0$ und $x < 0$.

Aufgabe 4.8: Führen Sie die Beweise der Formeln (4.45) (für α beliebig reell, $x > 0$), * (4.50), (4.51), (4.52) und (4.54) in der angedeuteten Weise aus.

Aufgabe 4.9: Beweisen Sie

$$\text{a) } (\sinh x)' = \cosh x, \quad \text{b) } (\cosh x)' = \sinh x. \quad *$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definitionen von $\sinh x$ und $\cosh x$.

4.6. Technik des Differenzierens

4.6.1. Beispiele

An einigen Beispielen wollen wir die Anwendung der Formeln von 4.5.1. üben.

Beispiel 4.17: $f(x) = \frac{5}{x^3} - 4\sqrt{x}$ ($x > 0$).

Nach (4.45) und Bemerkung 4.1 ist $f_1(x) = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$ für alle $x \neq 0$ und $f_2(x) = -4\sqrt{x} = -4x^{\frac{1}{2}}$ für alle $x > 0$ differenzierbar. Daher ist $f = f_1 + f_2$ für alle $x > 0$ differenzierbar mit

$$f'(x) = 5 \cdot (-3) x^{-4} - 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0),$$

$$f'(x) = -\frac{15}{x^4} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Im folgenden verwenden wir die in 4.5.1. angegebenen Formeln, ohne jeweils darauf zu verweisen.

Beispiel 4.18: Durch

$$f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

ist eine Funktion f für alle diejenigen x definiert, für die $\tan \frac{x}{2}$ definiert und von null verschieden ist, also für alle $x \neq k\pi$ (k ganz). Für diese x ist f auch differenzierbar. Mit

$$y = \ln |z|, \quad z = \tan w, \quad w = \frac{x}{2},$$

also

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\cos^2 w}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2},$$

liefert die Kettenregel

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\cos^2 w} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}},$$

also

$$f'(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} \quad (x \neq k\pi, k \text{ ganz}).$$

Bei einiger Übung kann man häufig die zur Anwendung der Kettenregel erforderlichen Substitutionen in Gedanken ausführen und sogleich das Ergebnis notieren.

Beispiel 4.19: $f(x) = \cos e^{\frac{1-x}{1+x}}$ ($x \neq -1$).

Offenbar ist f für alle $x \neq -1$ differenzierbar. Man erhält nach der Kettenregel,

wobei in Gedanken

$$y = \cos z, \quad z = e^w, \quad w = \frac{1-x}{1+x}$$

gesetzt wird,

$$f'(x) = -\sin e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)'$$

und weiter nach der Quotientenregel

$$f'(x) = -\sin e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2},$$

also

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}} \sin e^{\frac{1-x}{1+x}} \quad (x \neq -1).$$

Aufgabe 4.10: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen. Der Definitionsbereich * jeder dieser Funktionen sei stets die Menge aller x , für die der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck einen Sinn hat. Welche Werte x sind das? Für welche dieser Werte x sind die Funktionen jeweils differenzierbar?

a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^5} - 3^x x^3,$

b) $f(x) = \ln |\ln x|,$

c) $f(x) = \arctan \frac{1}{x},$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}},$

e) $f(x) = e^{-x^2} - \cos \sqrt{1-2x},$

f) $f(x) = \cosh^2 \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (\text{s. Aufgabe 4.9}).$

Aufgabe 4.11: Ermitteln Sie alle Punkte der Parabel

$$y = (x-1)^3(x+1),$$

*

zu denen eine zur x -Achse parallele Tangente gehört.

Aufgabe 4.12: Die gedämpfte freie Schwingung eines harmonischen Oszillators * (Federschwingung) wird durch

$$s(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \alpha)$$

beschrieben ($A, \alpha, \gamma, \omega$ Konstanten). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit dieser Bewegung zu einer beliebigen Zeit $t \geq 0$.

4.6.2. Logarithmische Differentiation

Es sei f eine Funktion, die auf einem Intervall differenzierbar und von null verschieden ist. Für die Ableitung der Funktion

$$u = \ln |f(x)|$$

erhält man nach der Kettenregel

$$u' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

also

$$[\ln |f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0). \quad (4.55)$$

Wegen (4.55) heißt der Quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ auch *logarithmische Ableitung der Funktion* f . Aus (4.55) folgt

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln |f(x)|]'. \quad (4.56)$$

Diese Formel kann man gelegentlich zur Berechnung der Ableitung $f'(x)$ benutzen.

Beispiel 4.20: $f(x) = \frac{(x-2)e^{2x}}{(x-1)^3(x+3)^2} \quad (x \neq 1, x \neq -3).$

Die unmittelbare Berechnung von $f'(x)$ ist hier recht aufwendig. Dagegen erhält man für $\ln |f(x)|$ nach den Logarithmengesetzen

$$\ln |f(x)| = \ln |x-2| + 2x - 3 \ln |x-1| - 2 \ln |x+3|$$

mit der leicht zu bildenden Ableitung

$$[\ln |f(x)|]' = \frac{1}{x-2} + 2 - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3}.$$

Daraus folgt nach (4.56)

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^{2x}}{(x-1)^3(x+3)^2} \left[\frac{1}{x-2} + 2 - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} \right] \quad (4.57)$$

oder

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{(x-1)^3(x+3)^2} \left[1 + 2(x-2) - \frac{3(x-2)}{x-1} - \frac{2(x-2)}{x+3} \right]. \quad (4.58)$$

Mit dem Übergang von (4.57) nach (4.58) wurde die hebbare Unstetigkeit der rechten Seite von (4.57) an der Stelle $x = 2$ beseitigt. Da f nach Satz 4.3 auch an der Stelle $x = 2$ differenzierbar ist, gilt nun (4.58) auch für diese Stelle, was wir ohne Beweis mitteilen.

In dieser Weise bildet man auch die Ableitung von Funktionen der Form

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)} \quad (u(x) > 0),$$

indem man zunächst die Funktion¹⁾

$$\ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$$

(nach der Produktregel) differenziert und dann (4.56) benutzt.

Beispiel 4.21: $f(x) = x^{\sin x} \quad (x > 0).$

Für die Funktion $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x$

¹⁾ Wegen $f(x) > 0$ kann in diesem Fall das Betragszeichen weggelassen werden.

liefert die Produktregel

$$[\ln f(x)]' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

woraus mit (4.56) folgt

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (x > 0).$$

Aufgabe 4.13: Bilden Sie durch logarithmische Differentiation die Ableitung der folgenden Funktionen: *

a) $f(x) = x^x \quad (x > 0),$

b) $f(x) = (\tan x)^x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)\sqrt[3]{x-2}} \quad (x > 3).$

4.6.3. Bemerkungen

Die Ableitung jeder differenzierbaren elementaren Funktion läßt sich nach den allgemeinen Differentiationsregeln auf die Ableitungen von Grundfunktionen, also auf elementare Funktionen, zurückführen. Daher gilt:

Die Ableitung jeder auf einem Intervall differenzierbaren elementaren Funktion ist eine elementare Funktion.

Beispiele zur Differentiation elementarer Funktionen haben wir in den vorangegangenen Abschnitten behandelt. Im Falle einer nicht-elementaren Funktion muß man u. U. auf die Definition der Ableitung zurückgreifen, also den Differenzenquotienten untersuchen.

Beispiel 4.22:
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ erhält man nach der Produktregel, wobei $\sin \frac{1}{x}$ nach der Kettenregel zu differenzieren ist,

$$f'(x) = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Um f auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$ zu untersuchen, bilden wir den Differenzenquotienten an dieser Stelle:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \sin \frac{1}{h} \quad (h \neq 0).$$

Für $h \rightarrow 0$ ist $\sin \frac{1}{h}$ (unbestimmt) divergent, folglich ist f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Nach Aufgabe 3.1 d) ist f an der Stelle $x = 0$ aber stetig; wir haben damit ein weiteres Beispiel einer an einer Stelle x_0 stetigen, aber dort nicht differenzierbaren Funktion (vgl. 4.3).

* **Aufgabe 4.14:** Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für jedes x differenzierbar ist, und ermitteln Sie die Ableitung.

4.7. Einige Ergänzungen zum Ableitungsbegriff

4.7.1. Die Differentialgleichung $y' = \alpha y$

Als Ableitung der Funktion

$$f(x) = C e^{\alpha x} \quad (C, \alpha: \text{Konstanten}) \quad (4.59)$$

erhält man nach der Kettenregel

$$f'(x) = C e^{\alpha x} \cdot \alpha. \quad (4.60)$$

Setzt man (4.59) in (4.60) ein, so folgt

$$f'(x) = \alpha f(x) \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (4.61)$$

Mit $y = f(x)$, also $y' = f'(x)$, kann man die Gleichung (4.61) auch in der Form

$$y' = \alpha y \quad (4.62)$$

schreiben. Diese Gleichung ist ein einfaches Beispiel einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*. Jede auf einem Intervall I differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft

$$f'(x) = \alpha f(x) \quad (x \in I)^1) \quad (4.63)$$

heißt *Lösung der Differentialgleichung (4.62) auf dem Intervall I* . Nach (4.61) ist die Funktion (4.59) für jede Konstante C eine Lösung von (4.62) auf dem Intervall $(-\infty, +\infty)$. In 6.2.2. werden wir zeigen, daß umgekehrt jede Lösung von (4.62) auf einem Intervall I sich mit einem geeigneten Wert C in der Form (4.59) darstellen läßt.

Die Gleichung (4.62) charakterisiert diejenigen Funktionen f , deren „Änderungsgeschwindigkeit“ $f'(x)$ an der Stelle x dem Funktionswert $f(x)$ an dieser Stelle proportional ist (Proportionalitätsfaktor α). Viele Naturvorgänge haben – wenigstens näherungsweise – dieses Verhalten, lassen sich nach dem Voranstehenden also durch Funktionen der Form (4.59) beschreiben. Hierin liegt die besondere Bedeutung der Exponentialfunktionen für die Anwendung.

Beispiel 4.23: Es sei $m(t)$ die zur Zeit t vorhandene Masse einer radioaktiven Substanz.

Es ist bekannt, daß zu jeder Zeit t die sog. Zerfallsgeschwindigkeit $\frac{dm(t)}{dt}$ der vorhandenen Masse $m(t)$ proportional ist, d. h., es gilt

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\lambda m(t) \quad (t \geq 0). \quad (4.64)$$

Dabei ist $\lambda > 0$ eine für die Substanz charakteristische Konstante (Zerfallskonstante).

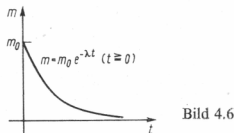
¹⁾ Vgl. Fußnote Seite 45.

Das Minuszeichen bedeutet, wie wir in 7.2. sehen werden, daß mit zunehmender Zeit die Masse abnimmt.

Nach den obigen Ausführungen hat die Differentialgleichung (4.64) die Lösung

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0),$$

wobei m_0 wegen $m(0) = m_0 e^0 = m_0$ die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Masse ist (Bild 4.6).



4.7.2. Der Differentiationsoperator

Wir knüpfen nun an 3.4.1., Bemerkung 3.2 an. Es bezeichne

$$C^1[a, b]$$

die Menge aller auf dem Intervall $[a, b]$ definierten und differenzierbaren Funktionen f , deren Ableitungen f' auf $[a, b]$ noch stetig, also Elemente von $C[a, b]$ sind. Funktionen f mit dieser Eigenschaft heißen auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. So hat z. B. die durch

$$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

definierte Funktion f die Ableitung

$$f'(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq 1),$$

die auf $[0, 1]$ stetig ist. Daher gilt $f \in C^1[0, 1]$.

Nach 4.3. ist jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion dort auch stetig. Folglich ist $C^1[a, b]$ eine Teilmenge von $C[a, b]$:

$$C^1[a, b] \subset C[a, b].$$

Genauer ist $C^1[a, b]$ eine echte Teilmenge von $C[a, b]$, denn z. B. gehört die Funktion g mit

$$g(x) = \sqrt{x - a} \quad (a \leq x \leq b)$$

zwar zu $C[a, b]$, aber nicht zu $C^1[a, b]$, da sie an der Stelle $x = a$ nicht rechtsseitig differenzierbar ist (vgl. 4.2.4.).

Nun sei $f \in C^1[a, b]$ und $g \in C^1[a, b]$. Ferner seien λ und μ beliebige reelle Zahlen. Mit f und g ist nach 4.4.1. auch $\lambda f + \mu g$ auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'. \quad (4.65)$$

Da die Ableitungen f' und g' nach Voraussetzung auf $[a, b]$ stetig sind, ist wegen (4.65) auch $(\lambda f + \mu g)'$ auf $[a, b]$ stetig (3.4.1., Satz 3.4), d. h.

$$\lambda f + \mu g \in C^1[a, b].$$

Die Menge $C^1[a, b]$ enthält also mit zwei Funktionen f und g jede Linearkombination dieser Funktionen und ist daher ebenfalls ein linearer Raum (vgl. 3.4.1.).

Ordnet man nun jeder Funktion $f \in C^1[a, b]$ ihre Ableitung $f' \in C[a, b]$ zu, so erhält man einen Operator D , dessen Definitionsbereich die Menge $C^1[a, b]$ ist und

dessen Wertevorrat in $C[a, b]$ liegt¹⁾. Dieser Operator ist also durch

$$Df := f' \quad (f \in C^1[a, b]) \quad (4.66)$$

definiert und heißt *Differentiationsoperator*.

Für beliebige Funktionen $f \in C^1[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$ und beliebige reelle Zahlen λ , μ gilt wegen (4.65)

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg. \quad (4.67)$$

Operatoren mit dieser Eigenschaft nennt man *linear*. Der Differentiationsoperator D ist also ein linearer Operator.

Die Differentialgleichung (4.62) kann man nun auch als *Operatorgleichung* in der Form

$$Df = \alpha f$$

schreiben. In der Mathematik und ihren Anwendungen treten Operatorgleichungen der unterschiedlichsten Art auf. Dabei kann man aus allgemeinen Eigenschaften der vorkommenden Operatoren (z. B. der Linearität) unabhängig von deren spezieller Gestalt bereits auf gewisse Eigenschaften der Lösungen schließen.

Der Differentiationsoperator D ist das einfachste Beispiel eines (gewöhnlichen) *Differentialoperators*. Darunter versteht man einen Operator, der jeder Funktion f aus einer gewissen Funktionenmenge eine Funktion zuordnet, die von f , f' und evtl. Ableitungen höherer Ordnung (s. nächster Abschnitt) abhängt. So ist etwa durch

$$Tf := f^3 - 4\sqrt{1 + (f')^2} \quad (f \in C^1[0, 1])$$

ein (nichtlinearer) Differentialoperator T erklärt, der z. B. der Funktion $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq 1$) die Funktion

$$Tf(x) = \sin^3 x - 4\sqrt{1 + \cos^2 x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

zuordnet.

4.8. Ableitungen höherer Ordnung

4.8.1. Definitionen und Beispiele

Jede auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion f besitzt eine Ableitung f' ; diese ist eine auf (a, b) definierte Funktion (vgl. 4.2.3.). Ist nun auch f' an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, dann kann man also die Ableitung

$$\left. \frac{df'(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (4.68)$$

bilden. Man nennt (4.68) *Ableitung 2. Ordnung* (oder *2. Ableitung*) der Funktion f an der Stelle x_0 und schreibt dafür

$$f''(x_0) \quad \text{oder} \quad y''|_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

Analog erklärt man die 3. Ableitung $f'''(x_0)$ usw.

Allgemein definiert man für eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$ die *Ableitung n-ter Ordnung* (oder *n-te Ableitung*) von f an einer Stelle x rekursiv durch die Vor-

¹⁾ In Teil 2 dieses Bandes wird sich herausstellen, daß der Wertevorrat von D die ganze Menge $C[a, b]$ ist (s. Satz 10.9).

schrift

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'. \quad (4.69)$$

Für später aufzustellende Formeln ist es zweckmäßig, $f(x)$ selbst als Ableitung nullter Ordnung zu bezeichnen, also

$$f^{(0)}(x) := f(x) \quad (4.70)$$

zu schreiben.

Statt „Ableitung n -ter Ordnung“ sagt man auch „*Differentialquotient n -ter Ordnung*“ und schreibt

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad (4.71)$$

(lies „ $d - n - y$ nach $d - x$ hoch n “) oder

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}. \quad (4.72)$$

Eine Funktion f heißt *auf einem Intervall I n -mal (stetig) differenzierbar*, wenn die Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert (und stetig ist). Natürlich existieren dann erst recht die Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ auf I .

Beispiel 4.24: Für die Funktion $f(x) = \sin x$ ergibt sich nacheinander:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' = \cos x, \\ f''(x) &= (\cos x)' = -\sin x, \\ f'''(x) &= (-\sin x)' = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x. \end{aligned}$$

Wegen $f^{(4)}(x) = f(x)$ gilt $f^{(5)}(x) = f'(x)$ usw. Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist also an jeder Stelle x beliebig oft differenzierbar, und für die Ableitung einer beliebigen Ordnung n gilt offenbar

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{für } n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & \text{für } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k \geq 0, \text{ ganz}). \quad (4.73)$$

Beispiel 4.25: Entsprechend findet man für die Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \quad (x > 0): \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ f'''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{x^3}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}. \end{aligned}$$

Man vermutet, daß für jede natürliche Zahl n gilt

$$\frac{d^n \ln x}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (n \geq 1, \text{ ganz}; x > 0). \quad (4.74)$$

Durch vollständige Induktion kann man (4.74) beweisen.

- * **Aufgabe 4.15:** Berechnen Sie die 2. Ableitung der Funktion $f(x) = e^{\sin^2 x}$.
- * **Aufgabe 4.16:** Berechnen Sie sämtliche Ableitungen der Funktion $f(x) = x^n$ (n eine natürliche Zahl).
- * **Aufgabe 4.17:** Ermitteln Sie eine Formel für die n -te Ableitung (n eine beliebige natürliche Zahl) der Funktion $f(x) = \cos x$
 - a) an einer beliebigen Stelle x ,
 - b) speziell an der Stelle $x = 0$.
- * **Aufgabe 4.18:** Wie lautet die n -te Ableitung (n eine beliebige natürliche Zahl) der Funktion $f(x) = a^x$ ($a > 0$)? Was ergibt sich speziell für $a = e$?

4.8.2. Physikalische Bedeutung der 2. Ableitung

Die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung mit der Weg-Zeit-Funktion

$$s = s(t) \quad (4.75)$$

ist nach 4.2.2. die 1. Ableitung von (4.75) nach der Zeit:

$$v(t) = \dot{s}(t). \quad (4.76)$$

Im allgemeinen ist auch die Geschwindigkeit zeitabhängig (ungleichförmige Bewegung); ihre Änderung in einem Zeitintervall $t \dots t + \Delta t$ ist

$$v(t + \Delta t) - v(t).$$

Man bezeichnet nun den Quotienten

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

als *mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $t \dots t + \Delta t$* und daher den Grenzwert

$$b(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \dot{v}(t)$$

als *Beschleunigung der Bewegung zur Zeit t* . Mit (4.76) gilt

$$b(t) = \ddot{s}(t), \quad (4.77)$$

d. h., *die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung ist die 2. Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit.*

Das Newtonsche Grundgesetz für die geradlinige Bewegung einer Punktmasse m unter dem Einfluß einer in Wegrichtung wirkenden Kraft F lautet

$$mb = F.$$

Mit (4.77) folgt daraus

$$m\ddot{s} = F. \quad (4.78)$$

Bei gegebener Kraft F ist (4.78) eine Differentialgleichung (vgl. 4.7.1.) für die Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$.

- * **Aufgabe 4.19:** Auf eine an einer Feder befestigte Punktmasse m wirkt (bei Vernachlässigung der Reibung) die Federkraft $F = -ks$ ($k > 0$: Federkonstante, s : Auslen-

kung der Punktmasse aus der Ruhelage). Zeigen Sie, daß die Funktion

$$s = A \cos(\omega_0 t - \alpha)$$

(A, α : beliebige Konstanten, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$) die Schwingung der Punktmasse beschreibt.

4.8.3. Rechenregeln für Ableitungen höherer Ordnung

Die Formeln 4.4.1. (4.27) und 4.4.1. (4.28) lassen sich offensichtlich unmittelbar auf Ableitungen einer beliebigen Ordnung n übertragen, d. h., es gilt unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (4.79)$$

$$(cf)^{(n)} = c f^{(n)} \quad (c \text{ eine Konstante}). \quad (4.80)$$

Wir wollen nun noch eine Formel für die höheren Ableitungen eines Produkts zweier Funktionen f und g angeben. Durch wiederholte Anwendung der Produktregel erhält man

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''. \quad (4.81)$$

Allgemein gilt die sog. *Leibnizsche Regel*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad (4.82)$$

die man mittels vollständiger Induktion beweisen kann. Diese Formel erinnert an die binomische Formel für die Potenz $(f + g)^n$; man beachte aber, daß in (4.82) die oberen Indizes Ableitungen bezeichnen, wobei insbesondere $f^{(0)}$ bzw. $g^{(0)}$ gemäß (4.70) die Funktion f bzw. g ist.

Beispiel 4.26: Gesucht ist die 3. Ableitung der Funktion

$$y = x^2 \sin x.$$

Hier könnten wir die ausgeschriebene Formel (4.81) anwenden. Zur Übung wollen wir aber die Formel (4.82) (mit $n = 3, f(x) = x^2, g(x) = \sin x$) benutzen. Danach gilt

$$\begin{aligned} y''' &= \binom{3}{0} (x^2)''' (\sin x)^{(0)} + \binom{3}{1} (x^2)'' (\sin x)' \\ &\quad + \binom{3}{2} (x^2)' (\sin x)'' + \binom{3}{3} (x^2)^{(0)} (\sin x)''', \end{aligned}$$

also mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1$$

sowie unter Beachtung von (4.73) und Aufgabe 4.16

$$y''' = 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x.$$

Aufgabe 4.20: Berechnen Sie die 4. Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = 3x^4 - 5x^2 + \cos \frac{x}{2}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3}{e^x}.$$

*

5. Differentiale

5.1. Weierstraßsche Zerlegungsformel und Differential

Ist f eine an der Stelle x differenzierbare Funktion, dann gilt auf Grund der Definition von $f'(x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] = 0. \quad (5.1)$$

Setzt man

$$\eta(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \quad (h \neq 0),$$

dann ist also

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \eta(h) \cdot h \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0. \quad (5.2)$$

Mit dem in Abschnitt 2.6. eingeführten Symbol o kann man (5.2) auch in der folgenden Form schreiben:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h) \quad \text{für} \quad h \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Formel (5.2) bzw. (5.3) heißt *Weierstraßsche Zerlegungsformel*. Betrachten wir die Darstellung (5.2). Danach ist die Funktionswertdifferenz

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) \quad (5.4)$$

in zwei Summanden zerlegt, wobei der zweite Summand für $h \rightarrow 0$ wegen $\eta(h) \rightarrow 0$ „schneller“ gegen null konvergiert als der erste (sofern man von dem Fall $f'(x) = 0$ einmal absieht). Für kleine Werte von $|h|$ ist daher der (in h lineare) erste Summand

$$f'(x) \cdot h \quad (5.5)$$

der „Hauptteil“ in der Zerlegung von Δy .

Mit Ausdrücken der Form (5.5) wollen wir uns nun befassen.

D. 5.1 Definition 5.1.: Die Funktion f sei an der Stelle x differenzierbar. Das Produkt $f'(x) \cdot h$ heißt das zu der Stelle x und dem Argumentzuwachs¹⁾ h gehörige **Differential** (1. Ordnung) der Funktion f und wird mit $df(x, h)$ bezeichnet, also

$$df(x, h) := f'(x) \cdot h. \quad (5.6)$$

Statt $df(x, h)$ schreibt man auch kurz df oder dy , falls y die abhängige Variable bezeichnet. Man beachte, daß das Differential $dy = df(x, h)$ außer von der Stelle x (an der die Funktion f differenzierbar sein muß) auch noch von der Variablen h abhängt, die beliebige Werte annehmen kann.

Beispiel 5.1: Das Differential der Funktion $f(x) = \sin x$ an einer beliebigen Stelle x und für einen beliebigen Zuwachs h ist

$$df(x, h) = (\sin x)' \cdot h = \cos x \cdot h.$$

Die Funktion $y = g(x) = x$ hat das Differential

$$dx = dy = (x)' \cdot h = h. \quad (5.7)$$

¹⁾ Man bezeichnet h auch im Fall $h < 0$ als Zuwachs.

Wegen (5.7) identifiziert man den Argumentzuwachs h einer beliebigen Funktion f mit dem Differential dx der speziellen Funktion g ; man schreibt also statt (5.6) auch

$$df(x, dx) = f'(x) dx \quad \text{oder} \quad dy = f'(x) dx. \quad (5.8)$$

Dabei ist nun dx eine (von x unabhängige) Variable, die beliebige Werte annehmen kann und auch *Differential der unabhängigen Variablen* genannt wird. Bei dieser Bezeichnung des Argumentzuwachses verwendet man für das Differential der Funktion f an der Stelle x statt (5.8) gelegentlich auch das Symbol $df(x)$. So schreibt man z. B. (vgl. Beispiel 5.1)

$$d(\sin x) = \cos x \cdot dx.$$

Unter der Voraussetzung $dx \neq 0$ kann man z. B. die zweite Gleichung von (5.8) durch dx dividieren und erhält

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (5.9)$$

Damit gewinnt die in 4.2.1. zunächst nur als symbolische Schreibweise für die Ableitung $f'(x)$ eingeführte Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ eine neue Bedeutung: Gemäß (5.9) ist $f'(x)$ der *Quotient der Differentiale* dy und dx . Deshalb sagt man statt „Ableitung“ auch „Differentialquotient“.

Beispiel 5.2: Die Funktion

$$f(x) = \ln x \quad (x > 0)$$

hat die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

und daher das zu einem beliebigen Zuwachs dx gehörige Differential

$$dy = \frac{1}{x} dx.$$

Nach Division durch dx ($dx \neq 0$) erhält man daraus die Ableitung zurück:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = f'(x).$$

Wenden wir uns nun wieder der Weierstraßschen Zerlegungsformel zu. Mit dx statt h und (5.8) lautet (5.2)

$$f(x + dx) - f(x) = df(x, dx) + \eta(dx) dx \quad \text{mit} \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \eta(dx) = 0$$

oder kurz

$$\Delta y = dy + \eta(dx) dx \quad \text{mit} \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \eta(dx) = 0. \quad (5.10)$$

Zur geometrischen Interpretation von (5.10) betrachten wir Bild 5.1, in dem wir die Bildkurve einer Funktion f und deren Tangente im Punkt $P(x, f(x))$ gezeichnet haben. Offenbar gilt $\overline{QP^*} = \Delta y$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck PQQ^* liest man ferner ab

$$\overline{QQ^*} = \tan \alpha \cdot dx = f'(x) dx = dy,$$

d. h., das Differential dy ist der zu dem (willkürlichen) Abszissenzuwachs dx gehörige Zuwachs der Tangentenordinate.

Nach (5.10) ist damit

$$\eta(dx) dx = \Delta y - dy = \overline{Q^*P^*}.$$

Für (5.10) kann man auch schreiben

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta y = dy + o(dx) \quad \text{für} \quad dx \rightarrow 0,$$

d. h., für $dx \rightarrow 0$ konvergiert die Differenz $\Delta y - dy$ „so schnell“ gegen null, daß sogar noch der Quotient $\frac{\Delta y - dy}{dx}$ den Grenzwert null hat. In diesem Sinne gilt

$$\Delta y \approx dy, \quad \text{falls } |dx| \text{ klein ist} \quad (5.11)$$

oder ausführlich

$$\blacksquare \quad f(x + dx) - f(x) \approx f'(x) dx, \quad \text{falls } |dx| \text{ klein ist}, \quad (5.12)$$

d. h., für einen betragsmäßig kleinen Argumentzuwachs dx ist das Differential $f'(x) dx$ ein Näherungswert für die Funktionswertdifferenz $f(x + dx) - f(x)$. Hiervon werden wir in 5.2.2. Gebrauch machen.

Beispiel 5.3: Für die Funktion $f(x) = x^2$ gilt

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2, \quad dy = (x^2)' dx = 2x dx,$$

$$\text{also} \quad \Delta y = dy + (dx)^2.$$

(Durch einen Vergleich mit (5.10) erhält man daraus $\eta(dx) = dx$.) Faßt man x^2 als Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge x auf (Bild 5.2), dann entspricht einer Vergrößerung der Seitenlänge um dx eine Vergrößerung des Flächeninhalts um Δy . Dabei setzt sich Δy aus den Inhalten der schraffierten Rechtecke, also dy , und dem Inhalt $(dx)^2$ des punktierten Quadrats zusammen. Falls dx klein im Vergleich zu x ist, trägt $(dx)^2$ nur unwesentlich zur Vergrößerung des Flächeninhalts bei; es gilt dann also $\Delta y \approx dy$.

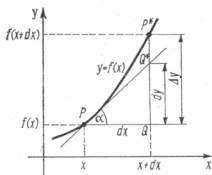


Bild 5.1

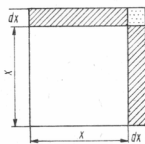


Bild 5.2

- * **Aufgabe 5.1:** Berechnen Sie die zu einer beliebigen Stelle x und einem beliebigen Zuwachs dx gehörigen Differentiale der folgenden Funktionen:

$$a) f(x) = \cos x, \quad b) f(x) = x e^{-x}, \quad c) f(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

- * **Aufgabe 5.2:** Geben Sie einen Näherungswert für $\sin 46^\circ$ an, indem Sie die Funktionswertdifferenz

$$\Delta y = \sin 46^\circ - \sin 45^\circ$$

durch das entsprechende Differential dy ersetzen.

5.2. Fehlerrechnung und Differential

5.2.1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung

Beim praktischen Rechnen muß man im allgemeinen mit fehlerbehafteten Größen arbeiten. So sind in numerischen Rechnungen reelle Zahlen durch Näherungswerte zu ersetzen, die sich durch Rundung ihrer Dezimalbruchentwicklung auf endlich viele Stellen nach dem Komma ergeben. (Zum Beispiel wird man für die Zahl $\pi = 3,14159 \dots$ etwa den auf 4 Stellen nach dem Komma gerundeten Wert 3,1416 verwenden.) Messungen liefern von vornherein nur Näherungswerte für die Maßzahlen der gemessenen Größen, da jede Messung einer Vielzahl von Einflüssen (wie z. B. Schwankungen der Raumtemperatur) unterliegt, die in ihrer Gesamtheit nicht kontrollierbar sind.

Nun sei \tilde{a} ein Näherungswert für die reelle Zahl a und $\Delta a := a - \tilde{a}$. Dann heißt die (nicht negative) Zahl

$$|\Delta a| = |a - \tilde{a}| \quad (5.13)$$

absoluter Fehler von \tilde{a} . Im Falle $\tilde{a} \neq 0$ kann man außerdem den relativen Fehler

$$\left| \frac{\Delta a}{\tilde{a}} \right| = \frac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|} \quad (5.14)$$

betrachten.

Da man den exakten Wert a im allgemeinen nicht kennt, ist auch der absolute (und damit der relative) Fehler von \tilde{a} unbekannt. Jedoch kennt man in den meisten Fällen eine obere Schranke für den absoluten Fehler, also eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$|\Delta a| \leq \delta. \quad (5.15)$$

Statt (5.13) und (5.15) kann man auch schreiben

$$|a - \tilde{a}| \leq \delta$$

oder

$$\tilde{a} - \delta \leq a \leq \tilde{a} + \delta, \quad (5.16)$$

d. h., der (unbekannte) Wert a liegt im Intervall $[\tilde{a} - \delta, \tilde{a} + \delta]$.

Ist \tilde{a} ein Meßwert, also $|\Delta a|$ ein Meßfehler, dann ist eine obere Fehlerschranke δ in vielen Fällen aus der Art der Messung bekannt. Man schreibt dann, besonders in der technischen Fachliteratur, statt (5.16) auch

$$a = \tilde{a} \pm \delta.$$

Beispiel 5.4: Für den Durchmesser D einer Kugel gelte $D = (6,35 \pm 0,02)$ cm. Diese Angabe bedeutet, daß der Wert $\tilde{D} = 6,35$ cm gemessen wurde und der absolute Fehler $|\Delta D| \leq 0,02$ cm ist. Für den relativen Fehler von \tilde{D} erhält man daraus

$$\left| \frac{\Delta D}{\tilde{D}} \right| \leq \frac{0,02}{6,35} = 0,00314 \dots < 0,0032 = 0,32\%.$$

Dabei haben wir eine obere Schranke für den relativen Fehler, wie üblich, auch in Prozent angegeben.

Entsteht \tilde{a} durch Rundung der reellen Zahl a auf n Stellen nach dem Komma, dann gilt auf Grund der bekannten Rundungsregeln für den Rundungsfehler

$$|\Delta a| \leq 0,5 \cdot 10^{-n}. \quad (5.17)$$

Beispiel 5.5: Einer vierstelligen Logarithmentafel entnimmt man für $a = \lg 53$ den Näherungswert $\tilde{a} = 1,7243$. Es gilt also nach (5.17) mit $n = 4$

$$|\lg 53 - 1,7243| = |\Delta a| \leq 0,5 \cdot 10^{-4} = 0,00005 \quad (5.18)$$

oder [vgl. (5.16)]

$$1,72425 \leq \lg 53 \leq 1,72435, \quad (5.19)$$

wobei man, genau genommen, das rechts stehende Zeichen \leq durch $<$ ersetzen könnte.

Für n reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n seien nun Näherungswerte $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ mit den oberen Fehlerschranken $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ gegeben. Es gilt also

$$|a_i - \tilde{a}_i| = |\Delta a_i| \leq \delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.20)$$

Als Näherungswert für die Summe

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

kann man dann

$$\tilde{s} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots + \tilde{a}_n \quad (5.21)$$

berechnen. Für den absoluten Fehler $|\Delta s| = |s - \tilde{s}|$ von \tilde{s} gilt

$$|\Delta s| = |(a_1 - \tilde{a}_1) + (a_2 - \tilde{a}_2) + \dots + (a_n - \tilde{a}_n)|.$$

Daraus folgt nach der Dreiecksungleichung unter Verwendung von (5.20)

$$\blacksquare \quad |\Delta s| \leq |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \dots + |\Delta a_n| \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n. \quad (5.22)$$

In Worten besagt die erste Ungleichung von (5.22):

Der absolute Fehler einer Summe von Zahlen ist höchstens gleich der Summe der absoluten Fehler der einzelnen Summanden. Man beachte, daß die absoluten Fehler auch dann zu *addieren* sind, wenn einige der \tilde{a}_i negativ sind.

Beispiel 5.6: Mit den Tafelwerten¹⁾

$$\sin 78^\circ = 0,9781, \quad \lg 53 = 1,7243$$

berechnet man für

$$s = 7 \cdot \sin 78^\circ - \lg 53$$

den Näherungswert

$$\tilde{s} = 7 \cdot 0,9781 - 1,7243 = 5,1224. \quad (5.23)$$

Wegen

$$\begin{aligned} |7 \cdot \sin 78^\circ - 7 \cdot 0,9781| &= 7 \cdot |\sin 78^\circ - 0,9781| \\ &\leq 7 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

und (5.18) gilt nach (5.22)

$$|\Delta s| \leq 3,5 \cdot 10^{-4} + 0,5 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4},$$

also

$$5,1220 \leq s \leq 5,1228.$$

¹⁾ Vgl. Fußnote 1 auf Seite 36.

Auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, ist daher $s = 5,12$. Eine Rundung auf drei Stellen nach dem Komma ist auf Grund der gefundenen Schranken für s offenbar nicht möglich. Ohne die Fehlerbetrachtung könnte man s überhaupt nicht gerundet angeben. Insbesondere ist es unzulässig, aus (5.23) etwa zu schließen, daß s , auf drei Stellen nach dem Komma gerundet, „sicher“ gleich 5,122 ist. Tatsächlich findet man mit genaueren Tafelwerten den auf drei Stellen nach dem Komma gerundeten Wert $s = 5,123$.

Aufgabe 5.3: Zur numerischen Berechnung von

$$s = \lg(750)^2 - \frac{2}{3} + 3\sqrt{4,7}$$

stehen die Tafelwerte $\lg 75 = 1,875$ und $\sqrt{4,7} = 2,168$ zur Verfügung.

- Berechnen Sie einen Näherungswert \tilde{s} für s .
- Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler von \tilde{s} ab.
- Geben Sie s gerundet an.

5.2.2. Anwendung des Differentials

Nun soll untersucht werden, wie sich ein Fehler einer Größe x auf eine von x abhängige Größe $y = f(x)$ auswirkt („Fehlerfortpflanzung“).

Gegeben seien also eine Funktion f , ein Näherungswert \tilde{x} einer Größe x und eine obere Schranke δ für den absoluten Fehler von \tilde{x} . Mit

$$dx = \Delta x = x - \tilde{x}$$

gilt also

$$|dx| \leq \delta. \quad (5.24)$$

Als Näherungswert für den unbekannten exakten Wert $y = f(x)$ kann man

$$\tilde{y} = f(\tilde{x})$$

berechnen. Gesucht ist eine obere Schranke für den absoluten Fehler

$$|\Delta y| = |y - \tilde{y}| = |f(\tilde{x} + dx) - f(\tilde{x})|. \quad (5.25)$$

Ist δ „klein“, dann ist wegen (5.24) auch $|dx|$ „klein“. Ist ferner f an der Stelle \tilde{x} differenzierbar, dann kann man nach (5.12) die Funktionswertdifferenz in (5.25) durch das zu der Stelle \tilde{x} und dem Zuwachs dx gehörige Differential von f annähern, d. h. es gilt

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(\tilde{x})| \cdot |dx| \leq |f'(\tilde{x})| \cdot \delta. \quad (5.26)$$

Für den relativen Fehler von \tilde{y} erhält man daraus

$$\left| \frac{\Delta y}{\tilde{y}} \right| \approx \left| \frac{dy}{\tilde{y}} \right| = \left| \frac{f'(\tilde{x})}{\tilde{y}} \right| \cdot |dx| \leq \left| \frac{f'(\tilde{x})}{\tilde{y}} \right| \cdot \delta. \quad (5.27)$$

Mit (5.26) und (5.27) hat man zwar nur genäherte, aber sehr einfache und praktisch durchaus brauchbare Abschätzungen für den absoluten bzw. relativen Fehler von \tilde{y} .

Beispiel 5.7: Zur Bestimmung der Höhe h eines Turmes werde vom Fußpunkt des Turmes aus eine horizontale Strecke der Länge l (in m) abgetragen und vom Ende dieser Strecke die Turmspitze anvisiert (Bild 5.3). Die Messung liefere für den Winkel α einen Näherungswert $\tilde{\alpha}$, wobei der absolute Fehler $|\Delta \alpha|$ höchstens gleich δ sei.

Wegen

$$h = f(\alpha) = l \cdot \tan \alpha$$

ist $\bar{h} = l \cdot \tan \bar{\alpha}$ ein Näherungswert für h , und mit $f'(\bar{\alpha}) = \frac{l}{\cos^2 \bar{\alpha}}$ gelten für den absoluten bzw. relativen Fehler von \bar{h} die genäherten Abschätzungen

$$|\Delta h| \approx |dh| = \frac{l}{\cos^2 \bar{\alpha}} |d\alpha| \leq \frac{l \cdot \delta}{\cos^2 \bar{\alpha}},$$

$$\left| \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right| \approx \left| \frac{dh}{\bar{h}} \right| \leq \frac{\delta}{\sin \bar{\alpha} \cdot \cos \bar{\alpha}} = \frac{2\delta}{\sin 2\bar{\alpha}}.$$



Bild 5.3

Speziell erhält man für

$$l = 30 \quad (\text{in m}), \quad \bar{\alpha} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad \delta = 0,1^\circ = \frac{\pi}{1800}$$

die Werte

$$\bar{h} = 30 \cdot \tan 60^\circ = 30 \sqrt{3} \quad (\text{in m}),$$

$$|\Delta h| \approx |dh| \leq \frac{30\pi}{\frac{1}{4} \cdot 1800} = \frac{\pi}{15} \quad (\text{in m}), \quad (5.28)$$

$$\left| \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right| \approx \left| \frac{dh}{\bar{h}} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{15}}{30\sqrt{3}}. \quad (5.29)$$

Zur numerischen Auswertung schätzen wir die Schranken in (5.28) und (5.29) weiter nach oben ab, indem wir in (5.28) mit $\pi = 3,1415 \dots < 3,15$ den Zähler vergrößern und in (5.29) außerdem mit $\sqrt{3} = 1,7320 \dots > 1,73$ den Nenner verkleinern:

$$|\Delta h| \approx |dh| \leq \frac{\pi}{15} < \frac{3,15}{15} = 0,21 \quad (\text{in m}), \quad (5.30)$$

$$\left| \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right| \approx \left| \frac{dh}{\bar{h}} \right| < \frac{0,21}{30 \cdot 1,73} = 0,00404 \dots < 0,0041 = 0,41 \, \%.$$

Man beachte, daß in (5.28) für π nicht der gerundete Wert 3,14 verwendet werden kann, da er kleiner als π ist, so daß $\frac{3,14}{15}$ eventuell nicht mehr obere Schranke für $|dh|$ ist. Entsprechendes gilt für (5.29). Zur numerischen Berechnung von \bar{h} verwenden wir für $\sqrt{3}$ den gerundeten Wert 1,732. Dann ist

$$30 \cdot 1,732 = 51,96 \quad (\text{in m})$$

ein Näherungswert für \bar{h} , wobei für den Rundungsfehler gilt

$$|\bar{h} - 51,96| = |30 \cdot \sqrt{3} - 1,732| \leq 30 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,015. \quad (5.31)$$

Aus (5.30) und (5.31) folgt schließlich

$$\begin{aligned} |h - 51,96| &= |(h - \bar{h}) + (\bar{h} - 51,96)| \\ &\leq |h - \bar{h}| + |\bar{h} - 51,96| \approx |dh| + |\bar{h} - 51,96| \\ &< 0,21 + 0,015 < 0,23 \quad (\text{in m}), \end{aligned}$$

d. h., es ist $51,96 - 0,23 = 51,73$ eine genäherte untere Schranke und $51,96 + 0,23 = 52,19$ eine genäherte obere Schranke (in m) für die wahre Höhe h des Turmes.

Aufgabe 5.4: Schätzen Sie näherungsweise den absoluten Fehler ab, der bei der Berechnung von $\sqrt{e+1}$ entsteht, wenn für e der Näherungswert 2,72 verwendet wird. *

Aufgabe 5.5: Für den Durchmesser D einer Kugel gelte $D = (6,35 \pm 0,02)$ cm (vgl. Beispiel 5.4). Ermitteln Sie genäherte obere Schranken für den absoluten und den relativen Fehler des damit berechenbaren Näherungswertes für das Kugelvolumen V . *

Aufgabe 5.6: Unter Verwendung einer Wheatstoneschen Brücke (Bild 5.4) soll ein Widerstand y gemessen werden. Mit dem Vergleichswiderstand R (in Ohm), der Meßdrahtlänge l (in mm) und der Kontakteinstellung x (in mm) gilt *

$$y = \frac{Rx}{l - x}.$$

Für x liest man einen Näherungswert \tilde{x} mit einem absoluten Fehler $|dx| \leq \delta$ ab.

Geben Sie genäherte obere Schranken für den absoluten und den relativen Fehler von \tilde{y} an.

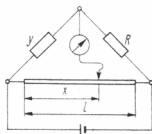


Bild 5.4

5.3. Differentiale höherer Ordnung

Es sei f eine auf einem Intervall (a, b) zweimal differenzierbare Funktion. Das zu einer beliebigen Stelle $x \in (a, b)$ und dem Zuwachs h gehörige Differential von f , also

$$dy = f'(x) \cdot h, \quad (5.32)$$

ist dann bezüglich x eine auf (a, b) differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$\frac{d}{dx} [f'(x) \cdot h] = f''(x) \cdot h, \text{ also mit dem Differential}$$

$$d(dy) = [f''(x) \cdot h] \cdot h = f''(x) \cdot h^2, \quad (5.33)$$

wobei wir denselben Zuwachs h wie in (5.32) gewählt haben. Man nennt (5.33) das *Differential 2. Ordnung der Funktion f* und schreibt dafür d^2y . Mit dx statt h und der für $h^2 = (dx)^2$ üblichen Schreibweise dx^2 gilt also

$$d^2y = f''(x) dx^2. \quad (5.34)$$

Beispiel 5.8: Das Differential 2. Ordnung der Funktion $y = f(x) = x^3$ ist

$$d^2(y) = (x^3)'' dx^2 = 6x dx^2.$$

In Verallgemeinerung von (5.34) definiert man das *Differential n -ter Ordnung* ($n \geq 2$) einer n -mal differenzierbaren Funktion f durch

$$d^n y := f^{(n)}(x) dx^n \quad \text{oder} \quad d^n f(x, dx) := f^{(n)}(x) dx^n. \quad (5.35)$$

Dividiert man die erste Gleichung von (5.35) durch dx^n ($dx \neq 0$), so erhält man

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

womit die in 4.7.1. für die Ableitung n -ter Ordnung eingeführte Schreibweise und die Bezeichnung „Differentialquotient n -ter Ordnung“ nachträglich gerechtfertigt sind (vgl. 5.1).

* *Aufgabe 5.7:* Berechnen Sie die Differentiale 3. Ordnung der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = x \ln |x| \quad (x \neq 0), \quad \text{b) } f(x) = 3x^2 - 5x.$$

6. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

6.1. Die Sätze von Fermat und Rolle

Die beiden folgenden Sätze sind der Ausgangspunkt für die in den nächsten Abschnitten zu behandelnden grundlegenden Aussagen über differenzierbare Funktionen.

Satz 6.1 (Satz von Fermat¹⁾): Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und nehme an der inneren Stelle ξ von I einen absoluten Extremwert an. Ist f an der Stelle ξ differenzierbar, dann gilt $f'(\xi) = 0$. S. 6.1

Geometrisch besagt dieser Satz, daß die Tangente an die Bildkurve von f im Punkt $P(\xi, f(\xi))$ den Anstieg Null hat, also parallel zur x -Achse verläuft (s. Bild 6.1).

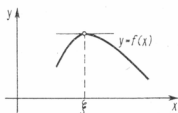


Bild 6.1

Satz 6.2 (Satz von Rolle²⁾): Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar; ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. S. 6.2

Beweis: Nach Satz 3.8 hat f auf $[a, b]$ ein absolutes Minimum m_1 und ein absolutes Maximum m_2 . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $m_1 = m_2$, dann ist f auf $[a, b]$ konstant, also $f'(\xi) = 0$ für jedes $\xi \in (a, b)$ (s. 4.2.3.).
2. Ist $m_1 \neq m_2$, dann nimmt f wegen $f(a) = f(b)$ mindestens einen der beiden absoluten Extremwerte an einer inneren Stelle ξ von $[a, b]$ an. Nach Satz 6.1 ist dann aber $f'(\xi) = 0$.

Damit ist der Satz bewiesen. ■

In Bild 6.2 haben wir Satz 6.2 geometrisch veranschaulicht, wobei wir zugleich berücksichtigt haben, daß es mehrere Stellen $\xi \in (a, b)$ geben kann, zu denen eine

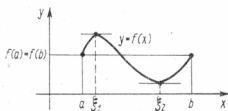


Bild 6.2

horizontale Tangente an die Bildkurve von f gehört. Wir bemerken noch, daß die Voraussetzung der Stetigkeit von f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ für die

¹⁾ Pierre de Fermat (1601–1665), französischer Mathematiker und Jurist.

²⁾ Michel Rolle (1652–1719), französischer Mathematiker.

Gültigkeit des Satzes von Rolle wesentlich ist. So ist z. B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad (\text{Bild 6.3})$$

auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ differenzierbar. Ferner gilt $f(0) = f(1) = 0$. Jedoch ist f an der Stelle $x = 1$ nicht linksseitig stetig. Tatsächlich gilt nun $f'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in (0, 1)$.

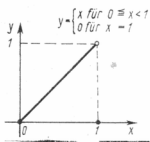


Bild 6.3

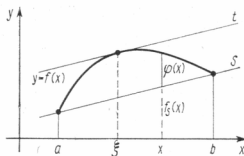


Bild 6.4

6.2. Mittelwertsätze der Differentialrechnung

6.2.1. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Offenbar kann man den Satz von Rolle auch folgendermaßen geometrisch interpretieren: Unter den angegebenen Voraussetzungen über die Funktion f gibt es mindestens eine Tangente an die Bildkurve von f , die zu der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ parallel ist, die also denselben Anstieg wie diese Sekante hat.

Der folgende wichtige Satz besagt nun geometrisch, daß diese Aussage auch dann gilt, wenn die Sekante nicht notwendig horizontal verläuft (s. Bild 6.4). Man beachte: Der Anstieg der Sekante s ist

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

der Anstieg der Tangente t ist $f'(\xi)$.

S. 6.3 Satz 6.3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung): Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert (mindestens) eine Stelle ξ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (a < \xi < b). \quad (6.1)$$

Beweis: Es sei f_s diejenige Funktion, deren Bildkurve die Sekante s ist, also

$$f_s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f_s(x)$$

(s. Bild 6.4) genügt dann auf $[a, b]$ den Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Daher existiert eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'_s(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Damit ist der Satz bereits bewiesen. ■

Setzt man

$$x_0 = a, \quad h = b - a, \quad \text{also} \quad x_0 + h = b,$$

so kann man jedes $\xi \in (a, b) = (x_0, x_0 + h)$ offenbar in der Form

$$\xi = x_0 + \vartheta h \quad \text{mit} \quad \vartheta \in (0, 1)$$

darstellen (s. Bild 6.5).

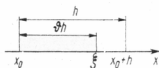


Bild 6.5

Damit kann man statt (6.1) auch schreiben

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6.2)$$

oder

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6.3)$$

oder

$$\blacksquare \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (6.4)$$

Offenbar kann h hierbei auch negativ sein. Zum Vergleich mit (6.3) erinnern wir an die Beziehung (5.12), die mit x_0 statt x und h statt dx übergeht in

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx h \cdot f'(x_0), \quad \text{falls } |h| \text{ klein ist.} \quad (6.5)$$

Während in (6.5) lediglich eine qualitative Aussage über die Funktionswertdifferenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ getroffen wird, ist diese Differenz in (6.3) exakt dargestellt, allerdings unter Einbeziehung einer Zahl ϑ , von der man im allgemeinen nur weiß, daß sie im Intervall $(0, 1)$ liegt. In einem einfachen Fall wollen wir eine solche Zahl ϑ einmal ermitteln.

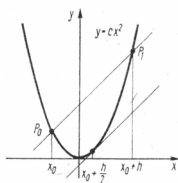


Bild 6.6

Beispiel 6.1: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = cx^2 \quad (c \neq 0 \text{ konstant}).$$

Offenbar erfüllt f für jedes Intervall $x_0 \dots x_0 + h$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Es gibt also mindestens ein ϑ , so daß (6.2) gilt, d. h.

$$\frac{c(x_0 + h)^2 - cx_0^2}{h} = 2c(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (6.6)$$

Als Bestimmungsgleichung für ϑ aufgefaßt, ist (6.6) eindeutig lösbar; man erhält $\vartheta = \frac{1}{2}$ (in diesem Fall ist ϑ also sowohl von x_0 als auch von h unabhängig; vgl. aber Aufgabe 6.1). Mit den Bezeichnungen von Bild 6.6 bedeutet das geometrisch: Zu der Sekante durch die Punkte P_0 und P_1 gibt es genau eine parallele Tangente an die Parabel $y = cx^2$; diese gehört zum Mittelpunkt $x_0 + \frac{h}{2}$ des Intervalls $[x_0, x_0 + h]$. Das gleiche Ergebnis erhält man auf dieselbe Weise für eine beliebige quadratische Parabel $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ($a_2 \neq 0$). Damit hat man ein einfaches Verfahren zur Tangentenkonstruktion für quadratische Parabeln.

In der Form (6.4) kann man den Mittelwertsatz zur *numerischen Berechnung eines Näherungswertes* für $f(x_0 + h)$ verwenden, wenn $f(x_0)$ – wenigstens näherungsweise – bekannt und $|h|$ klein ist. Dazu muß man $f'(x_0 + \vartheta h)$ (unter Beachtung der Ungleichung $0 < \vartheta < 1$) geeignet abschätzen.

Beispiel 6.2: Aus einer fünfstelligen Tafel entnimmt man den Wert

$$\ln 17 = 2,83321. \quad (6.7)$$

Gesucht ist ein Näherungswert für $\ln 17,2$.

Wegen $\ln 17,2 = \ln(17 + 0,2)$ wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \ln x$ mit

$$x_0 = 17, \quad h = 0,2 \quad (6.8)$$

an. Mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ lautet (6.4) für beliebiges x_0 und h

$$\ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \frac{h}{x_0 + \vartheta h} \quad (0 < \vartheta < 1),$$

also für die Werte von (6.8)

$$\ln 17,2 = \ln 17 + \frac{0,2}{17 + 0,2\vartheta} \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (6.9)$$

Für $\frac{0,2}{17 + 0,2\vartheta}$ ermitteln wir nun numerisch (leicht) berechenbare Schranken. Wegen $0 < \vartheta < 1$ gilt

$$\frac{0,2}{17 + 0,2 \cdot 1} < \frac{0,2}{17 + 0,2\vartheta} < \frac{0,2}{17 + 0,2 \cdot 0}.$$

Aus (6.9) folgt damit

$$\ln 17 + \frac{0,2}{17,2} < \ln 17,2 < \ln 17 + \frac{0,2}{17}. \quad (6.10)$$

In (6.7) ist die 5. Stelle nach dem Komma gerundet, es gilt also genauer

$$2,833205 \leq \ln 17 < 2,833215. \quad (6.11)$$

Ferner ist

$$\frac{0,2}{17,2} = 0,011627 \dots > 0,011627, \quad (6.12)$$

$$\frac{0,2}{17} = 0,011764 \dots < 0,011765. \quad (6.13)$$

Aus (6.10) folgt mit (6.11), (6.12) und (6.13) schließlich

$$2,833205 + 0,011627 < \ln 17,2 < 2,833215 + 0,011765,$$

also

$$2,844832 < \ln 17,2 < 2,844980$$

oder bei Rundung auf drei Stellen nach dem Komma

$$\ln 17,2 = 2,845.$$

Die damit erzielte Genauigkeit läßt sich durch Mitnahme einer größeren Stellenzahl in (6.7), (6.12) und (6.13) nicht verbessern, da die durch (6.10) gegebenen Schranken für $\ln 17,2$ sich nach (6.12) und (6.13) bereits in der 4. Stelle nach dem Komma unterscheiden.

In 6.3.5. werden wir eine Methode kennenlernen, die die Berechnung von Funktionswerten mit *beliebiger* Genauigkeit gestattet.

Aufgabe 6.1: Bestimmen Sie alle $\vartheta \in (0, 1)$, so daß die Tangente an die Kurve $y = e^x$ an der Stelle $\xi = x_0 + \vartheta h$ parallel zu der zum Intervall $[x_0, x_0 + h]$ gehörigen Sekante ist.

Aufgabe 6.2: Geben Sie unter Verwendung des Tafelwertes $e = 2,7183$ eine untere und eine obere Schranke für $e^{1,01}$ an.

6.2.2. Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Nach 4.2.3., Beispiel 4.4, ist die Ableitung einer auf einem Intervall I konstanten Funktion dort gleich null. Wir können nun zeigen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt:

Satz 6.4: Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und an jeder inneren Stelle x von I differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Dann ist f auf I konstant. S. 6.4

Beweis: Wir wählen eine beliebige Zahl $a \in I$. Zu jedem $x \in I$ ($x \neq a$) gibt es dann nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf das Intervall $a \dots x$, eine im Inneren dieses Intervalls – also auch im Inneren von I – gelegene Zahl ξ mit

$$f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) = 0$ folgt daraus $f(x) = f(a)$. Da $x \in I$ beliebig war, hat f auf I den konstanten Wert $f(a)$. ■

Satz 6.5: Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I stetig und an jeder inneren Stelle x von I differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$. Dann unterscheiden sich f und g auf I nur um eine additive Konstante. S. 6.5

Beweis: Die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in I)$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6.4. Folglich gibt es eine Zahl C mit

$$C = \varphi(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in I),$$

was zu zeigen war. ■

Beispiel 6.3: In 4.7.1. hatten wir erwähnt, daß jede Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \alpha y \quad (\alpha \text{ eine Konstante})$$

auf einem (offenen) Intervall I , also jede auf I differenzierbare Funktion f mit

$$f'(x) = \alpha f(x) \quad (x \in I), \quad (6.14)$$

die Form

$$f(x) = C e^{\alpha x} \quad (x \in I) \quad (6.15)$$

hat, wobei C eine geeignete Konstante ist. Nun können wir diese Behauptung beweisen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x} f(x) \quad (x \in I).$$

Mit f ist auch φ auf I differenzierbar und hat die Ableitung

$$\varphi'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x} f'(x) = e^{\alpha x} (f'(x) - \alpha f(x)) \quad (x \in I). \quad (6.16)$$

Da f nach Voraussetzung der Gleichung (6.14) genügt, folgt aus (6.16) $\varphi'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Nach Satz 6.4 gibt es also eine Zahl C mit

$$C = \varphi(x) = e^{-\alpha x} f(x) \quad (x \in I),$$

und daraus folgt die Behauptung.

* **Aufgabe 6.3:** Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$f(x) = -\arcsin \frac{1}{x} \quad (x \geq 1) \quad \text{und} \quad g(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1)$$

sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, und ermitteln Sie diese Konstante.

6.2.3. Der erweiterte Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Den folgenden Satz werden wir in 6.3.3. und 7.1.2. benötigen.

S. 6.6 Satz 6.6 (Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung): Die Funktionen f und g seien auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert (mindestens) eine Stelle ξ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b). \quad (6.17)$$

Wir bemerken, daß die linke Seite von (6.17) sinnvoll ist: Nach Satz 6.3, angewandt auf die Funktion g , existiert nämlich ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ mit

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\tilde{\xi}).$$

und wegen $g'(\tilde{\xi}) \neq 0$ folgt daraus $g(b) - g(a) \neq 0$.

Offenbar ist Satz 6.3 ein Spezialfall von Satz 6.6 für $g(x) = x$.

* **Aufgabe 6.4:** Beweisen Sie Satz 6.6 durch Anwendung von Satz 6.2 auf die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)].$$

S. 6.7 Satz 6.7: Ist neben (6.18) auch

$$g(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots + \tilde{a}_n x^n \quad (\tilde{a}_n \neq 0)$$

eine Entwicklung von $g(x)$ nach Potenzen von x , dann gilt

$$\tilde{a}_\nu = a_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Dieser Satz ist die Grundlage für die *Methode des Koeffizientenvergleichs*, die wir im nächsten Abschnitt sogleich anwenden werden.

Abschließend notieren wir noch die aus (6.21) folgende Taylorsche Formel von g mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} x + \frac{g''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (6.22)$$

Aus (6.18) und (6.22) folgt nach Satz 6.7

$$a_\nu = \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

was man natürlich auch direkt bestätigen kann.

6.3.2. Das Hornersche Schema

Es sei wieder g eine ganze rationale Funktion n -ten Grades, also

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0). \quad (6.23)$$

Häufig steht man vor der Aufgabe, für eine gegebene Zahl x_0 den Funktionswert $g(x_0)$ und eventuell auch die Ableitungen $g^{(\nu)}(x_0)$ numerisch auszurechnen. Für $n \geq 3$ ist eine direkte Berechnung im allgemeinen recht aufwendig. Nach (6.20) kann man diese Werte aber mühelos ermitteln, wenn man die Koeffizienten c_ν der Entwicklung von $g(x)$ nach Potenzen von $(x - x_0)$ kennt. Im folgenden wollen wir nun ein sehr einfaches Verfahren zur Berechnung dieser Koeffizienten herleiten.

Wir notieren die Taylorsche Formel (6.21) der Funktion g in der Form

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \left[\frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!} (x - x_0) + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-1} \right] \quad (6.24)$$

und setzen

$$g_1(x) = \frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!} (x - x_0) + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-1}. \quad (6.25)$$

Dann gilt

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot g_1(x). \quad (6.26)$$

Wir denken uns $g_1(x)$ nach Potenzen von x entwickelt und bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten mit b_ν :

$$g_1(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0. \quad (6.27)$$

Setzt man (6.27) in (6.26) ein und ordnet wieder nach Potenzen von x , so erhält man

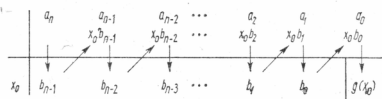
$$g(x) = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - x_0 b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (b_0 - x_0 b_1) x + (g(x_0) - x_0 b_0). \quad (6.28)$$

Durch (6.23) und (6.28) sind zwei verschiedene Darstellungen derselben ganzen rationalen Funktion g gegeben. Nach Satz 6.7 müssen also die Koeffizienten gleicher

Potenzen von x in (6.23) und (6.28) übereinstimmen; der Koeffizientenvergleich liefert

$$\left\{ \begin{array}{l} x^n: a_n = b_{n-1}, \\ x^{n-1}: a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1}, \\ x^1: a_1 = b_0 - x_0 b_1, \\ x^0: a_0 = g(x_0) - x_0 b_0, \end{array} \right\} \quad \text{also} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + x_0 b_1, \\ g(x_0) = a_0 + x_0 b_0. \end{array} \right\} \quad (6.29)$$

Gemäß (6.29) kann man nacheinander die Koeffizienten $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ und schließlich den Funktionswert $g(x_0)$ durch einfache Multiplikationen und Additionen berechnen. Führt man diese Rechnungen im Kopf durch, so arbeitet man zweckmäßig mit dem sog. *Hornerschen Schema*¹⁾:



In der ersten Zeile notiert man die Koeffizienten a_v ($v = n, n-1, \dots, 0$) des gegebenen Polynoms (6.23). Danach schreibt man a_n unverändert in die dritte Zeile (nach (6.29) ist $b_{n-1} = a_n$). Nun rechnet man in der durch die Pfeile angedeuteten Reihenfolge, wobei die schrägen Pfeile „Multiplikation mit x_0 “ und die senkrechten Pfeile (vom zweiten ab) „Addition der darüberstehenden Zahlen“ bedeuten.

Besonders einfach ist die Berechnung von b_r und $g(x_0)$ gemäß (6.29) bei Verwendung eines Taschenrechners; in diesem Falle braucht man das Horner'sche Schema natürlich nicht aufzuschreiben.

Aus (6.26) folgt

$$\frac{g(x)}{x - x_0} = g_1(x) + \frac{g(x_0)}{x - x_0}; \quad (6.30)$$

man kann daher das Hornersche Schema auch als *Algorithmus zur Division eines Polynoms $g(x)$ durch einen Linearfaktor $(x - x_0)$* auffassen: In der dritten Zeile ergeben sich die Koeffizienten b_v ($v = n - 1, n - 2, \dots, 0$) des verbleibenden Polynoms $g_1(x)$ und der Zähler $g(x_0)$ des „Restes“ $\frac{g(x_0)}{x - x_0}$.

Beispiel 6.4: $g(x) = 3x^4 + x^2 - 5x + 2$, $x_0 = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & 6 & & 12 & 26 & 42 \\ \hline 2 & 3 & 6 & & 13 & 21 & 44 = g(2) \end{array}$$

Aus der dritten Zeile liest man ab [vgl. (6.26)]

$$3x^4 + x^2 - 5x + 2 = 44 + (x - 2) \cdot (3x^3 + 6x^2 + 13x + 21).$$

Wie bisher mit $g(x)$ kann man nun mit $g_1(x)$ verfahren und erhält [vgl. (6.26)]

$$g_1(x) = g_1(x_0) + (x - x_0) \cdot g_2(x), \quad (6.31)$$

¹⁾ William George Horner (1786–1837), englischer Mathematiker.

²⁾ Man beachte, daß für jede fehlende Potenz x^k ($0 \leq k < n$) der Koeffizient $a_k = 0$ zu notieren ist.

wobei $g_2(x)$ ein Polynom $(n-2)$ -ten Grades ist. Das Hornerische Schema, angewandt auf $g_1(x)$, liefert die Koeffizienten von $g_2(x)$ und – in der letzten Spalte der neuen dritten Zeile – den Funktionswert $g_1(x_0)$. Nach (6.25) gilt aber

$$g_1(x_0) = \frac{g'(x_0)}{1!} = g'(x_0), \quad (6.32)$$

d. h., nach dem zweiten Schritt liefert das Hornerische Schema die 1. Ableitung der Funktion g an der Stelle x_0 . Entsprechend verfährt man mit $g_2(x)$, wodurch man mit dem Hornerischen Schema eine Zerlegung der Form

$$g_2(x) = g_2(x_0) + (x - x_0) \cdot g_3(x)$$

erhält. In Analogie zu (6.32) ist dabei $g_2(x) = g'_1(x_0)$. Andererseits folgt aus (6.25) die Beziehung $g'_1(x_0) = \frac{g''(x_0)}{2!}$, d. h., nach dem dritten Schritt kann aus dem Hornerischen Schema die Zahl

$$g_2(x_0) = \frac{g''(x_0)}{2!}$$

abgelesen werden. In diesem Sinne fortfahrend, kann man sämtliche Koeffizienten

$$\frac{g^{(v)}(x_0)}{v!} \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

der Taylorschen Entwicklung der Funktion g und damit die Ableitungen $g^{(v)}(x_0)$ berechnen. Das in der geschilderten Weise erweiterte Schema nennt man auch *vollständiges Hornerisches Schema*.

Beispiel 6.5: Gesucht ist die Taylorsche Formel der Funktion

$$g(x) = 3x^4 + x^2 - 5x + 2$$

mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 2$.

Das vollständige Hornerische Schema lautet (vgl. Beispiel 6.4)

$$\begin{array}{l} \text{1. Schritt} \left\{ \begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ & 6 & 12 & 26 & 42 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 13 & 21 & | & 44 = g(2) \end{array} \right. \\ \text{2. Schritt} \left\{ \begin{array}{c|cccc} & 6 & 24 & 74 & \\ \hline 2 & 3 & 12 & 37 & 21 & | & 95 = g'(2) \end{array} \right. \\ \text{3. Schritt} \left\{ \begin{array}{c|cccc} & 6 & 36 & & \\ \hline 2 & 3 & 18 & & & | & 73 = \frac{g''(2)}{2!} \end{array} \right. \\ \text{4. Schritt} \left\{ \begin{array}{c|ccc} & 6 & & \\ \hline 2 & 3 & & & & | & 24 = \frac{g'''(2)}{3!} \end{array} \right. \\ \text{5. Schritt} \left\{ \begin{array}{c|cc} & & \\ \hline 2 & 3 & & & & | & 3 = \frac{g^{(4)}(2)}{4!} \end{array} \right. \end{array}$$

Daraus liest man ab

$$g(x) = 44 + 95(x-2) + 73(x-2)^2 + 24(x-2)^3 + 3(x-2)^4.$$

Ferner entnimmt man z. B. $g'''(2) = 24 \cdot 3! = 144$.

Nun sei x_0 speziell eine Nullstelle der Funktion g , also $g(x_0) = 0$. Aus (6.26) folgt dann

$$g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x). \quad (6.33)$$

Damit hat man von $g(x)$ den Linearfaktor $(x - x_0)$ „abgespalten“. Ist auch noch

$$g_1(x_0) = g'(x_0) = 0,$$

dann gilt nach (6.31) die Gleichung $g_1(x) = (x - x_0) \cdot g_2(x)$, womit (6.33) übergeht in

$$g(x) = (x - x_0)^2 \cdot g_2(x).$$

Ist nun

$$g_2(x_0) = \frac{g''(x_0)}{2!} \neq 0,$$

so kann man von $g_2(x)$ den Faktor $(x - x_0)$ nicht ohne Rest „abspalten“, x_0 ist also eine zweifache Nullstelle der Funktion g (vgl. Band 1, Abschnitt 9.5.). Allgemein gilt für eine k -fache Nullstelle x_0 von g

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= (x - x_0)^k \cdot g_k(x) \\ \text{mit } g_k(x_0) &= \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Zur Bestimmung der Vielfachheit einer Nullstelle x_0 führt man das Horner'sche Schema bis zu der Zeile aus, in der erstmalig ein von null verschiedener Entwicklungskoeffizient erscheint. Die Anzahl der zuvor verschwindenden Entwicklungskoeffizienten ist die Vielfachheit von x_0 . Die Koeffizienten des verbleibenden Polynoms $g_k(x)$ stehen in der Zeile des letzten verschwindenden Entwicklungskoeffizienten.

Beispiel 6.6: Gesucht ist die Vielfachheit der Nullstelle $x_0 = -1$ der Funktion

$$g(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2.$$

Das Horner'sche Schema von $g(x)$ mit $x_0 = -1$ lautet

| | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|----------------------------------|
| | 1 | 3 | 5 | 7 | 6 | 2 | |
| | | -1 | -2 | -3 | -4 | -2 | |
| -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | | $0 = g(-1)$ |
| | | -1 | -1 | -2 | -2 | | |
| -1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | | $0 = g'(-1)$ |
| | | -1 | 0 | -2 | | | |
| -1 | 1 | 0 | 2 | | | | $0 = \frac{g''(-1)}{2!}$ |
| | | -1 | 1 | | | | |
| -1 | 1 | -1 | | | | | $3 = \frac{g'''(-1)}{3!} \neq 0$ |

Ergebnis: $x_0 = -1$ ist eine dreifache Nullstelle von $g(x)$, und es gilt

$$g(x) = (x + 1)^3 \cdot (1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2) = (x + 1)^3 (x^2 + 2).$$

Die Funktion $g_3(x) = x^2 + 2$ besitzt keine reellen Nullstellen, so daß $g(x)$ im Reellen nicht weiter zerlegbar ist.

- * **Aufgabe 6.5:** Berechnen Sie mit dem Hornerischen Schema den Wert der Funktion

$$g(x) = 2x^5 - 2x^4 + x^2 - 7x - 4$$

an der Stelle $x_0 = 3$.

- * **Aufgabe 6.6:** Entwickeln Sie die Funktion

$$g(x) = 2x^6 + 5x^3 - 4x + 9$$

nach Potenzen von $(x + 2)$. Welchen Wert hat $g^{(4)}(-2)$?

- * **Aufgabe 6.7:** Ermitteln Sie die Vielfachheit k der Nullstelle $x_0 = -3$ der Funktion

$$g(x) = x^4 - 19x^2 - 6x + 72,$$

und spalten Sie von $g(x)$ den Faktor $(x + 3)^k$ ab.

6.3.3. Taylorsche Formel für beliebige Funktionen

Die Berechnung der Funktionswerte einer ganzen rationalen Funktion erfordert lediglich algebraische Rechenoperationen und bereitet daher keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Mit dem Hornerischen Schema haben wir zudem ein Verfahren kennengelernt, das solche Berechnungen besonders einfach durchzuführen gestattet.

Wie berechnet man aber z. B. $\ln 2$, $\sin \frac{1}{3}$, $e^{1,7}$ oder allgemein den Funktionswert $f(x)$, wenn f eine nichtrationale Funktion ist?

Nach dem Vorstehenden wird man versuchen, die Funktion f durch eine ganze rationale Funktion zu ersetzen, die die Funktion f – wenigstens für alle x einer gewissen Umgebung einer Stelle x_0 – „hinreichend gut“ *approximiert*, d. h. *annähert*. Will man f in einer Umgebung von x_0 speziell durch eine lineare Funktion approximieren, also geometrisch die Bildkurve von f durch eine Gerade ersetzen, so wird man hierfür natürlich die Tangente, also die Bildkurve von

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (6.35)$$

wählen.¹⁾ Eine bessere Annäherung wird man durch ganze rationale Funktionen höheren Grades erreichen. Bei der Wahl solcher Funktionen läßt man sich von der Taylorschen Formel (6.21) leiten, d. h., man ordnet der Funktion f (die dazu an der Stelle x_0 n -mal differenzierbar sein muß) das Polynom

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

oder kurz

$$T_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x - x_0)^v \quad (6.36)$$

zu. $T_n(x)$ heißt *Taylorsches Näherungspolynom n -ter Ordnung der Funktion f für die Entwicklungsstelle x_0* . Die Bildkurve von T_n nennt man *Schmiegeparabel n -ter Ordnung*. (Nach (6.35) ist also die Schmiegeparabel erster Ordnung gerade die Tangente an die Bildkurve von f an der Stelle x_0).

¹⁾ Man sagt, die Funktionen T_1 *linearisiere* die Funktion f in einer Umgebung von x_0 .

Beispiel 6.7: Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 0$. Wegen $f^{(v)}(x) = e^x$, also $f^{(v)}(0) = e^0 = 1$ ($v = 0, 1, \dots$) gilt nach (6.36)

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad (6.37)$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= 1 + x, \\ T_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, & T_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

In Bild 6.7 haben wir die Bildkurve von f und ihre ersten vier Schmiegeparabeln eingezeichnet. Man vermutet, daß die Funktionen T_n (wenigstens in einer Umgebung von $x_0 = 0$) mit wachsendem n immer besser die Funktion f annähern.

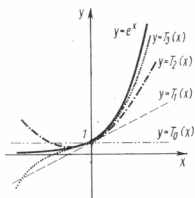


Bild 6.7

Um zu quantitativen Aussagen über die „Güte“ der Approximation von f durch T_n zu gelangen, muß man das sog. *Restglied n -ter Ordnung*

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad (6.38)$$

untersuchen. Dazu benötigt man eine geeignete Darstellung von $R_n(x)$; diese liefert der folgende

Satz 6.8 (Satz von Taylor): Die Funktion f sei in einer Umgebung U der Stelle x_0 $(n+1)$ -mal differenzierbar, und es sei $x \in U$. Setzt man [vgl. (6.38)]

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x - x_0)^v + R_n(x), \quad (6.39)$$

dann gibt es (mindestens) eine Zahl ϑ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6.40a)$$

und (mindestens) eine Zahl ϑ' mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta'(x - x_0))}{n!} (1 - \vartheta')^n (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta' < 1). \quad (6.40b)$$

Die Darstellung (6.40a) bzw. (6.40b) heißt **Lagrangesche¹⁾** bzw. **Cauchysche²⁾ Form des Restgliedes**. Es sei erwähnt, daß es noch andere Formen des Restgliedes gibt.

¹⁾ Joseph Louis Lagrange (1736–1813), französischer Mathematiker.

²⁾ Siehe Abschnitt 1.

Die Formel (6.39) mit dem Restglied in einer dieser Darstellungen heißt **Taylorische Formel der Funktion f für die Entwicklungsstelle x_0** .

Beweis von Satz 6.8: Wir definieren eine Hilfsfunktion φ , indem wir in (6.36) die Stelle x_0 durch die unabhängige Variable z ersetzen und x als Konstante betrachten:

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!} (x - z) + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (x - z)^n.$$

Wegen

$$\varphi(x) = f(x), \quad \varphi(x_0) = T_n(x)$$

gilt nach (6.38)

$$R_n(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0). \quad (6.41)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= f'(z) + \left[\frac{f''(z)}{1!} (x - z) - \frac{f'(z)}{1!} \right] + \dots \\ &\quad + \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x - z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} n(x - z)^{n-1} \right], \end{aligned}$$

also, da sich alle übrigen Summanden gegenseitig aufheben,

$$\varphi'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x - z)^n. \quad (6.42)$$

Die Funktion φ genügt auf dem Intervall $x_0 \dots x$ den Voraussetzungen des erweiterten Mittelwertsatzes (Satz 6.6). Es sei nun g eine zunächst beliebige Funktion, die diese Voraussetzungen ebenfalls erfüllt. Dann gibt es also eine zwischen x_0 und x gelegene Zahl ξ mit

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wegen (6.41) und (6.42) folgt daraus

$$R_n(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n. \quad (6.43)$$

Setzt man nun speziell $g(z) = (x - z)^{n+1}$, dann ist

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \quad g(x_0) = (x - x_0)^{n+1}, \\ g'(\xi) &= -(n+1)(x - \xi)^n, \end{aligned}$$

so daß (6.43) übergeht in

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Beachtet man noch, daß die zwischen x_0 und x gelegene Stelle ξ mit einer geeigneten Zahl $\vartheta \in (0,1)$ in der Form $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ darstellbar ist (vgl. 6.2.1.), so ist damit (6.40a) bewiesen. Analog folgt (6.40b) aus (6.43), indem man $g(z) = x - z$ setzt. (Da die Stelle ξ und damit ϑ von der Funktion g abhängt, haben wir hier ϑ' statt ϑ geschrieben.) ■

Die Taylorsche Formel (6.39) ist eine direkte Verallgemeinerung der Taylorschen Formel für ganze rationale Funktionen [s. (6.21)]. Ist nämlich f eine ganze rationale

Funktion m -ten Grades und $n \geq m$, dann ist $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, also auch $R_n(x) \equiv 0$. Man beachte aber, daß für $n < m$ auch in diesem Falle ein von null verschiedenes Restglied auftritt (vgl. Aufgabe 6.8 in 6.3.4.).

Mit $x = x_0 + h$ erhält man eine andere Schreibweise für (6.39) und (6.40a) bzw. (6.40b):

$$f(x_0 + h) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} h^v + R_n^*(h) \quad (6.44)$$

mit

$$R_n^*(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6.45a)$$

bzw.

$$R_n^*(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta' h)}{n!} (1 - \vartheta')^n h^{n+1} \quad (0 < \vartheta' < 1). \quad (6.45b)$$

Dabei haben wir das Restglied $R_n(x) = R_n(x_0 + h)$ mit $R_n^*(h)$ bezeichnet. Für $n = 0$ gehen (6.44) und (6.45a) in den Mittelwertsatz [s. (6.4)] über. Mit den Differentialen

$$d^v f(x_0, h) = f^{(v)}(x_0) \cdot h^v$$

(vgl. 5.3.) kann man (6.44) auch in der folgenden Form schreiben:

$$f(x_0 + h) = \sum_{v=0}^n \frac{d^v f(x_0, h)}{v!} + R_n^*(h).$$

Für $x_0 = 0$ ergibt sich aus (6.39) und (6.40a) bzw. (6.40b) die sog. *MacLaurinsche Form¹⁾* der Taylorschen Formel:

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(0)}{v!} x^v + R_n(x) \quad (6.46)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6.47a)$$

bzw.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta' x)}{n!} (1 - \vartheta')^n x^{n+1} \quad (0 < \vartheta' < 1). \quad (6.47b)$$

Die angegebenen Darstellungen des Restgliedes sollen dazu dienen, den absoluten Fehler

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|, \quad (6.48)$$

den man bei der Approximation einer gegebenen Funktion f durch die ganze rationale Funktion T_n begeht, abzuschätzen. Nun enthält jede dieser Darstellungen eine Zahl ϑ bzw. ϑ' , für die lediglich die Ungleichungen

$$0 < \vartheta < 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 < \vartheta' < 1 \quad (6.49)$$

bekannt sind. Um numerisch berechenbare Fehlerschranken zu gewinnen, muß man also versuchen, für $|R_n(x)|$ eine obere Schranke zu finden, die die Zahl ϑ bzw. ϑ' nicht mehr enthält. Welche Restgliedform dafür besser geeignet ist und wie man konkret

¹⁾ Colin MacLaurin (1698–1746), schottischer Mathematiker.

vorzugehen hat, hängt von der gegebenen Funktion f (und gelegentlich auch von den Werten x und n) ab¹⁾). Jedenfalls wird dabei von den Ungleichungen (6.49) wesentlich Gebrauch zu machen sein.

6.3.4. Taylorsche Formel einiger elementarer Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Taylorsche Formel einiger wichtiger Funktionen für eine beliebige Ordnung n in der MacLaurinschen Form herleiten und das Restglied abschätzen.

1. $f(x) = e^x$ ($-\infty < x < +\infty$):

Nach (6.46) gilt (vgl. Beispiel 6.7)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (6.50)$$

mit dem Restglied in der Lagrangeschen Form [s. (6.47a)]

$$R_n(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Zur Abschätzung des Restgliedes beachten wir, daß aus $0 < \vartheta < 1$ die Ungleichung

$$\vartheta x \leq \vartheta |x| \leq |x|$$

und daraus wegen der Monotonie der Exponentialfunktion schließlich

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (6.51)$$

folgt. Nun gilt, wie man zeigen kann,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (6.52)$$

Aus (6.51) ergibt sich daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (6.53)$$

Diese Aussage bedeutet wegen (6.48), daß man für jeden Wert x den Funktionswert $f(x) = e^x$ durch den Polynomwert

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{\nu!}$$

beliebig genau approximieren kann, wenn man nur die Zahl n hinreichend groß wählt. (In 6.3.5. behandeln wir hierzu ein Beispiel.) Aus (6.51) liest man noch ab, daß die Zahl n um so größer zu wählen sein wird, je weiter der Wert x von der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ entfernt ist (s. Bild 6.7).

2. $f(x) = \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$):

Nach Beispiel 4.24 gilt

$$\begin{aligned} f^{(2\nu)}(0) &= 0, & f^{(2\nu+1)}(0) &= (-1)^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x. \end{aligned}$$

¹⁾ Wegen der etwas einfacheren Gestalt der Lagrangeschen Form wird man zunächst versuchen, mit dieser zum Ziel zu kommen.

Wegen $f^{(2k)}(0) = 0$ ist $T_{2k}(x) = T_{2k-1}(x)$, also

$$f(x) = T_{2k-1}(x) + \begin{cases} R_{2k-1}(x), \\ R_{2k}(x). \end{cases}$$

Wir verwenden das Restglied $R_{2k}(x)$ in der Lagrangeschen Form und erhalten

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x) \quad (6.54)$$

mit

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{\cos \vartheta x}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Aus $|\cos \vartheta x| \leq 1$ folgt unmittelbar die Abschätzung

$$|R_{2k}(x)| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (6.55)$$

und daraus wegen (6.52)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k}(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Zur Verwendung von $R_{2k}(x)$ anstelle von $R_{2k-1}(x)$ bemerken wir folgendes: Analog (6.55) gilt

$$|R_{2k-1}(x)| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Für $|x| < 2k+1$ (also insbesondere für Werte x in der Nähe der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$) ist daher die obere Schranke für $|R_{2k}(x)|$ kleiner als die obere Schranke für $|R_{2k-1}(x)|$, d. h., (6.55) liefert eine feinere Abschätzung für den Fehler $|f(x) - T_{2k-1}(x)|$.

3. $f(x) = \cos x$ ($-\infty < x < +\infty$):

Mit den Ableitungen (s. Aufgabe 4.14)

$$\begin{aligned} f^{(2\nu)}(0) &= (-1)^\nu, & f^{(2\nu+1)}(0) &= 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \\ f^{(2k+2)}(x) &= (-1)^{k+1} \cos x \end{aligned}$$

erhält man wie im voranstehenden Beispiel

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x) \quad (6.56)$$

mit

$$R_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} \frac{\cos \vartheta x}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

und der Abschätzung

$$|R_{2k+1}(x)| \leq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (6.57)$$

aus der wiederum folgt

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R_{2k+1}(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

4. $f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1)^1$:

Es gilt (vgl. Beispiel 4.25)

$$f^{(v)}(0) = (-1)^{v-1} (v-1)! \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Damit ergibt sich die Taylorsche Formel

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x). \quad (6.58)$$

Hier notieren wir das Restglied in der Lagrangeschen Form:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (6.59a)$$

und in der Cauchyschen Form:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n (1-\vartheta')^n}{(1+\vartheta'x)^{n+1}} x^{n+1}. \quad (6.59b)$$

Für $x \geq 0$ schätzen wir $R_n(x)$ nach (6.59a) ab und erhalten wegen

$$1 + \vartheta x \geq 1, \quad \text{also} \quad \frac{1}{1 + \vartheta x} \leq 1$$

die Ungleichung

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \geq 0). \quad (6.60a)$$

Zur Abschätzung von $R_n(x)$ für $-1 < x < 0$ ist (6.59b) besser geeignet. Wir formen zunächst um in

$$|R_n(x)| = \left| \left(\frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta'x} \right)^n \frac{1}{1+\vartheta'x} x^{n+1} \right|.$$

Nun gelten für $-1 < x < 0$ wegen $0 < \vartheta' < 1$ die Ungleichungen

$$0 < 1 - \vartheta' < 1 + \vartheta'x, \quad 1 + \vartheta'x > 1 + x > 0,$$

also

$$0 < \frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta'x} < 1, \quad 0 < \frac{1}{1+\vartheta'x} < \frac{1}{1+x}.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x < 0). \quad (6.60b)$$

Die Schranken in (6.60a) bzw. (6.60b) sind für jedes feste $x \in [0, 1]$ bzw. $x \in (-1, 0)$ Nullfolgen bezüglich n . Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (-1 < x \leq 1), \quad (6.61)$$

Für $x > 1$ ist dagegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = +\infty$, so daß für diese Werte x aus (6.60a) nicht die Gültigkeit von (6.61) gefolgert werden kann.

¹⁾ Man beachte, daß die Funktion $g(x) = \ln x$ nicht um die Stelle $x = 0$ entwickelt werden kann, da sie nur für $x > 0$ definiert ist.

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($x > -1$, α beliebig reell):

Wegen

$$f^{(v)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-v+1)(1+x)^{\alpha-v} \quad (v = 1, 2, \dots),$$

also

$$f^{(v)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-v+1),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

erhält man unter Verwendung der Binomialkoeffizienten

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-v+1)}{v!} = \binom{\alpha}{v} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

die Taylorsche Formel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x). \quad (6.62)$$

Das Restglied lautet in der Lagrangeschen Form

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (6.63a)$$

und in der Cauchyschen Form

$$R_n(x) = (n+1) \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta'x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}. \quad (6.63b)$$

Wie im vorigen Beispiel empfiehlt es sich, die Restgliedabschätzung für $x \geq 0$ nach (6.63a) und für $-1 < x < 0$ nach (6.63b) vorzunehmen. Wir verzichten auf die Durchführung und notieren sogleich das Ergebnis:

$$|R_n(x)| \leq \begin{cases} \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} & \text{für } x \geq 0, n+1 > \alpha^1), \\ (n+1) \binom{\alpha}{n+1} |x|^{n+1} & \text{für } -1 < x < 0, \alpha \geq 1, \\ (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)^{1-\alpha}} & \text{für } -1 < x < 0, \alpha < 1. \end{cases} \quad (6.64)$$

Ebenfalls ohne Beweis teilen wir mit, daß aus (6.64) die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (|x| < 1)$$

gefolgert werden kann.

Wir betrachten noch den Spezialfall $\alpha = n$. In diesem Fall ist $\binom{\alpha}{n+1} = 0$, also nach (6.63a) $R_n(x) = 0$ für jedes $x > -1$, so daß (6.62) in die binomische Formel übergeht.

Aufgabe 6.8: Ermitteln Sie die Taylorsche Formel der Funktion $g(x) = 3x^4 + x^2 - 5x + 2$ für die Entwicklungsstelle $x_0 = 2$ mit dem Restglied $R_1(x)$ in der Lagrangeschen Form (vgl. Beispiel 6.5).

¹⁾ Eine Abschätzung von $|R_n(x)|$ für $x \geq 0$, $n+1 < \alpha$ wird seltener benötigt; daher haben wir sie nicht angegeben.

- * **Aufgabe 6.9:** Bestimmen Sie die Taylorsche Formel der Funktion $f(x) = \cosh x$ in der MacLaurinschen Form mit dem Restglied $R_{2k+1}(x)$ ($k \geq 0$, ganz) nach Lagrange.
- * **Aufgabe 6.10:** Approximieren Sie die Funktion $f(x) = e^{\cos x}$ durch ihr Taylorsches Näherungspolynom 2. Ordnung mit $x_0 = 0$. Schätzen Sie sowohl $|R_2(x)|$ als auch $|R_3(x)|$ nach oben ab (vgl. die Bemerkungen bei der Aufstellung der Taylorschen Formel für die Funktion $f(x) = \sin x$).

6.3.5. Anwendungen der Taylorschen Formel

In der Taylorschen Formel einer gegebenen Funktion f kann man noch über die Entwicklungsstelle x_0 und die Ordnung n verfügen. Die Stelle x_0 wird man so wählen, daß sie in der Nähe der interessierenden Werte x liegt (vgl. die Ausführungen in 6.3.4. nach Formel (6.53)) und zugleich die Werte $f^{(v)}(x_0)$ leicht berechenbar sind. Die Wahl der Zahl n richtet sich nach der Art der Anwendung der Taylorschen Formel.

Erste Anwendungsmöglichkeit: Die Funktion f wird durch das Näherungspolynom T_n ersetzt, wobei die Ordnung n vorgeschrieben ist. Damit erhält man die *Näherungsformel*

$$f(x) \approx \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x - x_0)^v,$$

wobei man den absoluten Fehler

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

wie in 6.3.4. abschätzen kann. Die gewonnene Fehlerschranke hängt dann noch von x ab, so daß sich zwei Fälle unterscheiden lassen.

Fall 1: Zu einem gegebenen Intervall I ist eine für alle $x \in I$ gültige Fehlerschranke zu berechnen.

Fall 2: Zu einer vorgeschriebenen Fehlerschranke $\delta > 0$ sind diejenigen Werte x zu ermitteln, für die $|R_n(x)| \leq \delta$ ist.

Wir behandeln nun einige Beispiele, wobei wir stets $x_0 = 0$ wählen.

Beispiel 6.8: Die Funktion $f(x) = \sin x$ soll durch ihr Näherungspolynom zweiter Ordnung approximiert und der Fehler für $|x| \leq 5^\circ$ abgeschätzt werden (Fall 1). Nach (6.54) ist $T_2(x) = T_1(x) = x$; es gilt also

$$\sin x \approx x, \quad (6.65)$$

und für den absoluten Fehler folgt aus (6.55) mit $k = 1$

$$|\sin x - x| = |R_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad \text{für jedes } x. \quad (6.66)$$

Der Fehler ist demnach um so kleiner, je kleiner $|x|$ ist. Speziell für

$$|x| \leq 5' = 5 \frac{\pi}{180} = 0,0872 \dots < 0,0873$$

erhält man aus (6.66)

$$|\sin x - x| < \frac{1}{6} (0,0873)^3 < 0,00012.$$

Für Winkel zwischen -5° und $+5^\circ$ ist die Näherungsformel (6.65) also mindestens auf 3 Stellen nach dem Komma genau¹⁾.

Aus (6.66) folgt außerdem die Gültigkeit der in Beispiel 2.19 behaupteten Formel $\sin x = x + O(x^3)$ für $x \rightarrow 0$ (vgl. Aufgabe 2.7) und übrigens auch für jede andere „Bewegung“ von x .

Wir betrachten noch eine praktische Anwendung von (6.65).

Beispiel 6.9: Die Schwingung eines mathematischen Pendels der Länge l und der Masse m kann durch den Auslenkwinkel x beschrieben werden (s. Bild 6.8). Dabei ist x eine Funktion der Zeit t , die der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (6.67)$$

genügt (g : Erdbeschleunigung). Für „kleine“ Auslenkwinkel kann man (6.67) näherungsweise ersetzen durch die einfachere Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0.$$



Bild 6.8

Mit beliebigen Konstanten A und α lautet die Lösung dieser Differentialgleichung

$$x = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t - \alpha \right),$$

wie man leicht durch Einsetzen bestätigt (vgl. Aufgabe 4.19). Man beachte, daß (6.65) in diesem Fall in der rein qualitativen Form

$$\sin x \approx x \quad \text{für } |x| \ll 1, ^2)$$

also ohne Fehlerabschätzung, verwendet wurde.

Beispiel 6.10: Approximiert man die Funktion $f(x) = \sin x$ durch ihr Näherungspolynom dritter Ordnung, so erhält man nach (6.54) die Näherungsformel

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}. \quad (6.68)$$

Gesucht seien diejenigen Werte x , für die der absolute Fehler von (6.68) höchstens 10^{-4} beträgt (Fall 2). Aus (6.55) mit $k = 2$ folgt

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| = |R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},$$

und die Ungleichung $\frac{|x|^5}{120} \leq 10^{-4}$ ist äquivalent zu

$$|x| \leq \sqrt[5]{0,012} = 0,41 \dots$$

¹⁾ Man beachte, daß mindestens auf der rechten Seite von (6.65) der Wert x im Bogenmaß einzusetzen ist.

²⁾ Das Zeichen \ll bedeutet „wesentlich kleiner als ...“.

Für diese Werte x , also insbesondere für $|x| \leq 23^\circ (= 0,40 \dots)$, wird daher mit (6.68) die gewünschte Genauigkeit erzielt.

Beispiel 6.11: Für die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ ($x > -1$) erhält man aus (6.62) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $n = 1$ die Näherungsformel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad (6.69)$$

deren Fehler wir für $|x| < 10^{-2}$ abschätzen wollen (Fall 1). Nach (6.64) gilt

$$|R_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{x^2}{8} & \text{für } x \geq 0, \\ \frac{x^2}{4\sqrt{1+x}} & \text{für } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$|R_1(x)| < \begin{cases} \frac{10^{-4}}{8} = 1,25 \cdot 10^{-5} & \text{für } 0 \leq x < 10^{-2}, \\ \frac{10^{-4}}{4\sqrt{1-10^{-2}}} < \frac{10^{-4}}{4 \cdot 0,99} < 2,53 \cdot 10^{-5} & \text{für } -10^{-2} < x < 0. \end{cases}$$

Beispiel 6.12: Ein Generator mit dem inneren Widerstand R_i erzeuge die Ursprungsspannung E . Wird ein äußerer Widerstand R_a (Verbraucher) angeschlossen, so ist die über R_a abfallende Spannung U (Klemmenspannung) durch

$$U = E \frac{R_a}{R_i + R_a} \quad (6.70)$$

gegeben. Gesucht ist eine für $R_a \gg R_i$ gültige Näherungsformel für die relative Spannungsänderung $\frac{E-U}{E}$.

Wir formen (6.70) zunächst um in

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}. \quad (6.71)$$

Nach (6.62) mit $\alpha = -1$ und $n = 1$ gilt

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1-x \quad (6.72)$$

mit der Fehlerabschätzung [s. (6.64)]

$$\left| \frac{1}{1+x} - (1-x) \right| \leq x^2 \quad (x \geq 0). \quad (6.73)$$

Wendet man (6.72) mit $x = \frac{R_i}{R_a}$ auf (6.71) an, so folgt

$$\frac{U}{E} \approx \left(1 - \frac{R_i}{R_a} \right) \quad (R_a \gg R_i)$$

und daraus

$$\frac{E-U}{E} \approx \frac{R_i}{R_a} \quad (R_a \gg R_i). \quad (6.74)$$

Eine quantitative Aussage über die Genauigkeit von (6.74) erhält man wegen $\frac{R_l}{R_a} \geq 0$ aus (6.73):

$$\left| \frac{E - U}{E} - \frac{R_l}{R_a} \right| = \left| \frac{U}{E} - \left(1 - \frac{R_l}{R_a} \right) \right| \leq \left(\frac{R_l}{R_a} \right)^2.$$

Ist z. B. eine Genauigkeit von 10^{-2} vorgeschrieben, so darf man (6.74) nur anwenden, wenn $\frac{R_l}{R_a} \leq 10^{-1}$, also $R_a \geq 10R_l$ ist.

Eine **zweite Anwendungsmöglichkeit der Taylorschen Formel** besteht in der numerischen Berechnung des Funktionswertes $f(x)$ für einen gegebenen Wert x . Dazu approximiert man $f(x)$ wieder durch $T_n(x)$. Infolge der im allgemeinen vorzunehmenden Rundungen erhält man für $T_n(x)$ aber ebenfalls einen Näherungswert \bar{y} . Aus

$$|f(x) - \bar{y}| = |[f(x) - T_n(x)] + [T_n(x) - \bar{y}]|$$

folgt nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - \bar{y}| \leq |R_n(x)| + |T_n(x) - \bar{y}|. \quad (6.75)$$

Gilt nun für den betrachteten Wert x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad (6.76)$$

so kann man den Fehler $|R_n(x)|$ durch die Wahl einer hinreichend großen Zahl n beliebig klein halten. Der Rundungsfehler $|T_n(x) - \bar{y}|$ läßt sich durch die Mitnahme von genügend vielen Dezimalen in jedem Falle beliebig klein machen. *Unter der Voraussetzung (6.76) kann man also den Funktionswert $f(x)$ auf diese Weise mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen.* Die Berechnung von \bar{y} bereitet dabei – insbesondere bei Verwendung von Rechenautomaten – keine Schwierigkeiten; das Schwergewicht liegt auf der Fehlerabschätzung.

Beispiel 6.13: Gesucht ist ein Näherungswert \bar{y} für die Zahl e mit einem absoluten Fehler von höchstens $0,5 \cdot 10^{-5}$. Die Taylorsche Formel der Funktion $f(x) = e^x$ (s. 6.50) geht für $x = 1$ über in

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

wobei nach (6.51) gilt

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Aus der Definition der Zahl e ,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

kann man schließen, daß $e < 3$ ist. Damit ergibt sich

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Nun wählen wir n so groß, daß

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6} \quad (6.77)$$

ist. (Wir werden sogleich sehen, daß damit die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird.) Wegen

$$10! = 3\,628\,800 > 3 \cdot 10^6$$

ist (6.77) für $n = 9$ erfüllt, d. h., es gilt

$$|R_9(1)| < 10^{-6}. \quad (6.78)$$

Bei der numerischen Berechnung von

$$T_9(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{9!}$$

kann man die ersten 3 Summanden exakt angeben. Rundet man die folgenden 7 Summanden jeweils auf 6 Stellen nach dem Komma, so erhält man einen Näherungswert \bar{y} für $T_9(1)$ mit dem Rundungsfehler (s. 5.2.1.)

$$|T_9(1) - \bar{y}| \leq 7 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 3,5 \cdot 10^{-6}. \quad (6.79)$$

Aus (6.78) und (6.79) folgt wegen (6.75)

$$|e - \bar{y}| < 10^{-6} + 3,5 \cdot 10^{-6} = 4,5 \cdot 10^{-6}. \quad (6.80)$$

Der Fehler ist also tatsächlich kleiner als $0,5 \cdot 10^{-5}$. Berechnet man $T_9(1)$ in der angegebenen Weise, so ergibt sich

$$\bar{y} = 2,718\,282.$$

Nach (6.80) ist

$$\bar{y} - 4,5 \cdot 10^{-6} < e < \bar{y} + 4,5 \cdot 10^{-6},$$

also

$$2,718\,2775 < e < 2,718\,2865$$

oder auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet

$$e = 2,7183.$$

- * **Aufgabe 6.11:** Geben Sie eine (von x abhängige) obere Schranke für den absoluten Fehler der Näherungsformel

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

an. Für welche Werte x ist dieser Fehler sicher kleiner als 10^{-4} ?

- * **Aufgabe 6.12:** Stellen Sie die Auslenkhöhe h eines mathematischen Pendels (s. Beispiel 6.9 und Bild 6.8) in Abhängigkeit vom Auslenkwinkel x für „kleine“ Werte x näherungsweise dar.
- * **Aufgabe 6.13¹⁾:** Ein biegsamer Stab liege in zwei Punkten A und B in der Höhe h auf und werde in einem Punkt C durch einen Stab der Länge h gestützt (s. Bild 6.9). Der Fußpunkt F' der Stütze sei gegenüber dem Fußpunkt F des Lotes von C auf die Horizontale um eine Strecke s verschoben.
- a) Geben Sie eine für $s \ll h$ gültige Näherungsformel für die Strecke d an, um die sich der aufliegende Stab im Punkt C senken kann.

¹⁾ Dieses Beispiel ist [7] entnommen.

b) Wie groß ist der absolute Fehler dieser Näherungsformel für $h = 1,5$ m und $s \leq 0,1$ m höchstens?

Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 6.11.

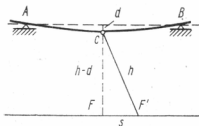


Bild 6.9

Aufgabe 6.14: Es seien x_1 und x_2 positive Zahlen mit $0 \leq x_2 - x_1 \leq \frac{x_1}{10}$. Geben * Sie eine einfache Näherungsformel für $\ln \frac{x_2}{x_1}$ an und schätzen Sie den absoluten Fehler ab.

Aufgabe 6.15: In Beispiel 2.11 wurde die Geschwindigkeit v eines fallenden Körpers * bei geschwindigkeitsproportionalem Luftwiderstand mit

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$$

angegeben. Ermitteln Sie eine für $\frac{kt}{m} \ll 1$ gültige Näherungsformel für v , indem Sie die Funktion $f(t) = e^{-\frac{kt}{m}}$ durch ihr Näherungspolynom erster Ordnung ersetzen.

Aufgabe 6.16: Berechnen Sie einen Näherungswert für $\frac{1}{\sqrt[3]{1100}}$ mit einem absoluten * Fehler von höchstens $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Umformung $1100 = 10^3 (1 + 0,1)$.

7. Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen

7.1. Berechnung von Grenzwerten

7.1.1. Vorbemerkung

Die Grenzwertsätze von 2.5 kann man durch weitere Aussagen ergänzen. So gilt z. B. in Ergänzung zu (2.21), wie ohne Beweis mitgeteilt sei:

Aus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g_1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$$

folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{für } g_1 > 0 \\ -\infty & \text{für } g_1 < 0. \end{cases}$$

Im Falle $g_1 = 0$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty, \quad (7.1)$$

ist dagegen eine allgemeine Aussage über den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] \quad (7.2)$$

nicht möglich; in diesem Falle hängt das Verhalten von $f_1(x) \cdot f_2(x)$ für $x \rightarrow x_0$ von den speziellen Eigenschaften der Funktionen f_1 und f_2 in einer punktierten Umgebung von x_0 ab.

Zur Charakterisierung der Grenzwertaufgabe (7.2) unter der Voraussetzung (7.1) verwendet man das Symbol

$$„0 \cdot (+\infty)“. \quad (7.3)$$

Eine entsprechende Bedeutung haben die Symbole

$$\left. \begin{array}{llll} „0 \cdot (-\infty)“, & „\frac{0}{0}“, & „\frac{\pm\infty}{\pm\infty}“, & „(+\infty) - (+\infty)“, \\ „0^0“, & „(+\infty)^0“, & „1^{\pm\infty}“. & \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

Auch die Behandlung der durch (7.4) charakterisierten Grenzwertaufgaben setzt die Kenntnis der darin vorkommenden Funktionen voraus¹⁾. Alles bisher für die „Bewegung“ $x \rightarrow x_0$ Gesagte gilt sinngemäß für die „Bewegungen“ $x \rightarrow x_0 \pm 0$, $x \rightarrow \pm\infty$.

Beispiel 7.1: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ist vom Typ $\frac{0}{0}$, der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x)$ vom Typ „0 · (-∞)“.

Im folgenden behandeln wir eine Methode zur Untersuchung solcher Grenzwerte unter Verwendung der Differentialrechnung.

¹⁾ Aus diesem Grund werden die Symbole (7.3) und (7.4) gelegentlich auch als „unbestimmte Ausdrücke“ bezeichnet. Es muß aber betont werden, daß die damit charakterisierten Grenzwertaufgaben für konkret vorgegebene Funktionen f_1 und f_2 natürlich stets ein eindeutig bestimmtes Konvergenzverhalten haben.

7.1.2. Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (Regeln von Bernoulli – de l'Hospital)

Satz 7.1 (Erste Regel von Bernoulli¹⁾ – de l'Hospital): Die Funktionen f_1 und f_2 seien S. 7.1 in einem Intervall $(x_0, x_0 + c)$ ($c > 0$) differenzierbar, und es gelte dort $f_2'(x) \neq 0$. Ferner sei

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f_2(x) = 0. \quad (7.5a)$$

Ist $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ für $x \rightarrow x_0 + 0$ konvergent oder bestimmt divergent, so trifft dasselbe für $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ zu, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}. \quad (7.6)$$

Beweis: Falls f_1 und f_2 an der Stelle x_0 nicht bereits rechtsseitig stetig sind, kann man dies durch die Festsetzung $f_1(x_0) = 0$ und $f_2(x_0) = 0$ wegen (7.5a) nachträglich erreichen. Das Verhalten von $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ für $x \rightarrow x_0 + 0$ wird davon nicht beeinflusst.

Nun sei (x_n) eine gegen x_0 konvergente Folge mit $x_n \in (x_0, x_0 + c)$ für jedes n . Dann erfüllen f_1 und f_2 auf jedem Intervall $[x_0, x_n]$ die Voraussetzungen des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Es gibt also zu jedem n ein $\xi_n \in (x_0, x_n)$ mit

$$\frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)} = \frac{f_1(x_n) - f_1(x_0)}{f_2(x_n) - f_2(x_0)} = \frac{f_1'(\xi_n)}{f_2'(\xi_n)}. \quad (7.7)$$

Da auch (ξ_n) gegen x_0 konvergiert (warum?), ist nach Voraussetzung $\frac{f_1'(\xi_n)}{f_2'(\xi_n)}$ konvergent oder bestimmt divergent. Wegen (7.7) gilt dann dasselbe für $\frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)}$, und daraus folgt die Behauptung. ■

Satz 7.1 bezieht sich auf Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$; eine entsprechende Aussage für Grenzwerte vom Typ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ geben wir ohne Beweis an:

Satz 7.2 (Zweite Regel von Bernoulli – de l'Hospital): Satz 7.1 bleibt richtig, wenn S. 7.2 (7.5a) ersetzt wird durch die Voraussetzung

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f_1(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f_2(x) = \pm\infty. \quad (7.5b)$$

Schließlich notieren wir noch ohne Beweis die

Bemerkung 7.1: Die Sätze 7.1 und 7.2 gelten sinngemäß²⁾ auch für die „Bewegungen“

$$x \rightarrow x_0 - 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{und} \quad x \rightarrow -\infty.$$

¹⁾ Gemeint ist Johann Bernoulli (s. Abschnitt 1.).

²⁾ Vgl. Fußnote auf Seite 19.

Beispiel 7.2: Gesucht ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \quad (\text{vgl. Beispiel 7.1}).$$

Da der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1$$

existiert, gilt nach Satz 7.1 unter Beachtung von Bemerkung 7.1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = 1.$$

Beispiel 7.3: Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$$

ist ebenfalls vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = +\infty,$$

wobei sich die bestimmte Divergenz mit Satz 2.4 ergibt. Auch in diesem Falle ist Satz 7.1 anwendbar und liefert

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(\ln x)'} = +\infty.$$

Die Beispiele 7.2 und 7.3 zeigen, daß Grenzwertaufgaben desselben Typs tatsächlich zu verschiedenen Ergebnissen führen können (s. 7.1.1.).

Häufig kommt man erst nach wiederholter Anwendung von (7.6) zum Ziel.

Beispiel 7.4: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ ist vom Typ „ $\frac{+\infty}{+\infty}$ “. Doch auch der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

ist noch von diesem Typ. Durch nochmalige Differentiation erhält man

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Zweimalige Anwendung von Satz 7.2 liefert also

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Abschließend betrachten wir ein Beispiel, in dem die Regeln von Bernoulli – de l'Hospital nicht anwendbar sind.

Beispiel 7.5: Gesucht ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$$

Es gilt

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x.$$

Da aber $1 + \cos x$ für $x \rightarrow +\infty$ unbestimmt divergent ist, ist Satz 7.2 nicht anwendbar. Auf anderem Wege erhält man aber sofort (s. Aufgabe 2.4f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Aufgabe 7.1: Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0),$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2},$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln x}$

7.1.3. Grenzwerte vom Typ „ $0 \cdot (\pm \infty)$ “ und „ $(+\infty) - (+\infty)$ “

Diese Fälle lassen sich durch geeignete Umformungen auf die in 7.1.2. behandelten zurückführen. Im Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] \quad (,0 \cdot (\pm \infty)')$$

formt man um in

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right)^1.$$

Für die anderen „Bewegungen“ von x verfährt man analog.

Beispiel 7.6: Für den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) \quad (,0 \cdot (-\infty)')$$

erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Damit sich dieser Typ ergibt, muß f_1 in einem (evtl. sehr kleinen) Intervall $(x_0, x_0 + c)$ ($c > 0$) konstantes Vorzeichen haben (vgl. Satz 2.4).

Die Grenzwertaufgabe

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} [f_1(x) - f_2(x)] \quad (,,(+\infty) - (+\infty)“)$$

läßt sich stets durch die Umformung

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)f_2(x)}} \quad (7.8)$$

in den Typ $\frac{0}{0}$ überführen. Gelegentlich kommt man aber durch eine den speziellen Funktionen angepaßte andere Umformung schneller auf diesen Typ.

Beispiel 7.7: In Beispiel 2.11 haben wir die Geschwindigkeit

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (7.9)$$

eines fallenden Körpers betrachtet. Dabei ist $k > 0$ ein Maß für den Luftwiderstand. Für verschwindenden Luftwiderstand, also $k = 0$, hat (7.9) keinen Sinn. Wir wollen das Verhalten von v für $k \rightarrow +0$ untersuchen. Schreibt man (7.9) in der Form

$$v = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0 \right) e^{-\frac{k}{m}t},$$

so erkennt man, daß für $k \rightarrow +0$ ein Grenzwert vom Typ $„(+\infty) - (+\infty)“$ vorliegt. Statt nun (7.8) anzuwenden, kann man auch folgendermaßen umformen:

$$v = \frac{mg \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)}{k} + v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Für $k \rightarrow +0$ konvergiert der zweite Summand gegen v_0 , und der erste führt auf einen Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$. Mit

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{\frac{d}{dk} \left[mg \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right]}{\frac{d(k)}{dk}} = \lim_{k \rightarrow +0} (gt) = gt$$

erhält man schließlich $\lim_{k \rightarrow +0} v = gt + v_0$, also die bekannte Formel für die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes.

* *Aufgabe 7.2:* Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right).$$

7.1.4. Grenzwerte vom Typ $„0^{0\pm}“$, $„(+\infty)^{0\pm}“$ und $„1^{\pm\infty}“$

Zur Ermittlung von

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} [f_1(x)]^{f_2(x)}$$

für die in der Überschrift genannten Fälle betrachtet man zunächst die Funktion

$$\ln [f_1(x)^{f_2(x)}] = f_2(x) \cdot \ln f_1(x) \quad (f_1(x) > 0). \quad (7.10)$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} [f_2(x) \cdot \ln f_1(x)] \quad (7.11)$$

ist nun, wie man sich leicht überlegt, vom Typ „ $0 \cdot (\pm \infty)$ “, also unter Umständen nach 7.1.3. berechenbar. Existiert (7.11) als eigentlicher Grenzwert, so gilt wegen (7.10) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} [f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0+0} [f_2(x) \cdot \ln f_1(x)]} \quad (7.12)$$

Beispiel 7.8: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ („ 0^{0+} “) ergibt sich wegen

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow +0} [x \cdot \ln x] = 0$$

(s. Beispiel 7.7) nach (7.12) zu $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^0 = 1$.

Beispiel 7.9: Für den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad („1^{-\infty}“)$$

erhält man wegen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} \ln (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\ln (1 + \sin x)}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{\cos x}{1 + \sin x}}{1} = 1 \end{aligned}$$

nach (7.12)

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

Aufgabe 7.3: Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

7.2. Monotonie

In diesem und den folgenden Abschnitten wird sich herausstellen, daß ein enger Zusammenhang zwischen charakteristischen Eigenschaften einer Funktion und dem Vorzeichen ihrer Ableitungen besteht.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *Monotonie* bzw. *strengen Monotonie* einer Funktion (s. Band 1, 9.3.). Bild 7.1 zeigt die Bildkurve einer Funktion f mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, d. h., mit positivem Tangentenanstieg. Offenbar ist f auf

$[a, b]$ streng monoton wachsend. Über den damit vermuteten Zusammenhang zwischen (strenger) Monotonie und dem Vorzeichen der 1. Ableitung geben die folgenden Sätze genaue Auskunft.

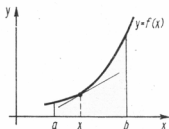


Bild 7.1

S. 7.3 Satz 7.3: Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und auf dem Inneren von I differenzierbar. Genau dann ist f auf I monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$, wenn gilt

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases} \text{ für jedes } x \text{ aus dem Inneren von } I. \quad (7.13)$$

Beweis: Wir führen den Beweis für monoton wachsende Funktionen (und zwar indirekt); für monoton fallende Funktionen kann man analog schließen.

- a) Es sei $f'(x) \geq 0$ für jedes x aus dem Inneren von I . Wäre f auf I nicht monoton wachsend, dann gäbe es Zahlen $x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$ und $f(x_0) > f(x_1)$, also

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0. \quad (7.14)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert aber ein $\xi \in (x_0, x_1) \subset I$, so daß die linke Seite von (7.14) gleich $f'(\xi)$ ist. Wegen (7.14) wäre $f'(\xi) < 0$ – im Widerspruch zur Voraussetzung.

- b) Es sei f auf I monoton wachsend. Gäbe es ein x_0 im Inneren von I mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0,$$

dann würde für hinreichend nahe bei x_0 gelegene Zahlen $x_1 \neq x_0$ die Ungleichung (7.14) gelten. Folglich wäre f nicht monoton wachsend. ■

S. 7.4 Satz 7.4: Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und auf dem Inneren von I differenzierbar. Gilt

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases} \text{ für jedes } x \text{ aus dem Inneren von } I, \quad (7.15)$$

dann ist f auf I streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$.

Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu Teil a) des Beweises von Satz 7.3.

Während (7.13) hinreichend und notwendig für die Monotonie von f ist, ist (7.15) zwar hinreichend, aber nicht notwendig für strenge Monotonie. So ist z. B. die Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend, aber es gilt $f'(0) = 0$.

Beispiel 7.10: Wir bestimmen das Monotonieverhalten der Funktion

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad (x > -1).$$

Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ < 0 & \text{für } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ist f nach Satz 7.4 auf $(-1, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, +\infty)$ streng monoton fallend. Für jedes $x > -1$, $x \neq 0$ ist daher $f(x) < f(0) = 0$ (s. Bild 7.2), womit zugleich die Ungleichung

$$\ln(1+x) < x \quad (x > -1, x \neq 0)$$

bewiesen ist.

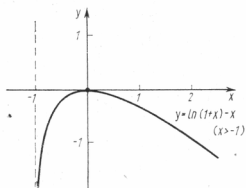


Bild 7.2

Aufgabe 7.4: Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 7 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Aufgabe 7.5: Beweisen Sie die sogenannte *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (n \geq 2, \text{ ganz}; x > -1, x \neq 0).$$

Hinweis: Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f(x) = (1+x)^n - 1 - nx \quad (x > -1).$$

7.3. Relative Extremwerte

7.3.1. Der Begriff des relativen Extremwertes

Die Eigenschaft eines Funktionswertes $f(x_0)$, absoluter Extremwert der Funktion f auf einem Intervall $I \subset D(f)$ zu sein, hat *globalen* Charakter: Man vergleicht $f(x_0)$ mit allen Werten, die die Funktion f auf dem vorgegebenen Intervall I annimmt (s. Definition 3.4). Mit dem Begriff des relativen Extremwertes erfaßt man eine *lokale* Eigenschaft von f : Man vergleicht $f(x_0)$ nur mit den Werten, die die Funktion f auf einer gewissen (evtl. sehr kleinen) Umgebung von x_0 annimmt. Dazu muß die Funktion f mindestens in einer Umgebung von x_0 definiert sein, d. h., x_0 muß ein innerer Punkt von $D(f)$ sein. Diese Überlegung führt zu der

Definition 7.1: Eine Stelle x_0 im Inneren des Definitionsbereiches der Funktion f **D. 7.1**

heißt **Stelle eines relativen (oder lokalen)** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximums} \\ \text{Minimums} \end{array} \right\}$ von f , wenn es eine Umgebung U

von x_0 in $D(f)$ gibt, so daß x_0 Stelle des absoluten $\begin{Bmatrix} \text{Maximums} \\ \text{Minimums} \end{Bmatrix}$ von f auf U ist, d. h., es gilt

$$\begin{cases} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \quad \text{für alle } x \in U. \quad (7.16)$$

Gilt statt (7.16) sogar

$$\begin{cases} f(x_0) > f(x) \\ f(x_0) < f(x) \end{cases} \quad \text{für alle } x \in U, x \neq x_0,$$

dann heißt x_0 Stelle eines relativen (oder lokalen) $\begin{Bmatrix} \text{Maximums} \\ \text{Minimums} \end{Bmatrix}$ von f im engeren Sinne.

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt dabei relatives (oder lokales) $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ von f (im engeren Sinne).

Abkürzende Sprechweisen, wie z. B. „relative Maximumstelle“, werden analog verwendet wie für absolute Extremwerte (vgl. die Bemerkungen nach Definition 3.4).

Die in Bild 7.3 skizzierte Funktion f hat an der Stelle x_1 ein relatives Maximum i. e. S.¹⁾ Eine geeignete Umgebung U von x_1 haben wir markiert. Das Verhalten von f außerhalb dieser Umgebung ist dabei ohne Belang. Es interessiert also nicht, daß z. B. $f(x_3) > f(x_1)$ ist. Ferner hat f an den Stellen x_2, x_4 und x_5 relative Minima i. e. S. und an der Stelle x_3 ein relatives Maximum, aber nicht im engeren Sinne.

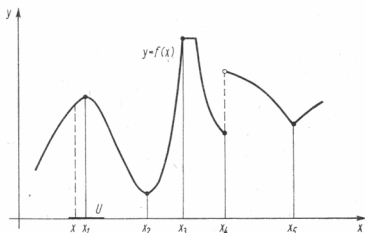


Bild 7.3

Hat die Funktion f an den Stellen x_1 und x_3 relative Maxima und ist sie auf dem Intervall $[x_1, x_3]$ stetig (s. Bild 7.3), dann nimmt sie nach Satz 3.8 an einer Stelle $x_2 \in [x_1, x_3]$ ihr absolutes Minimum auf $[x_1, x_3]$ an. Da x_2 aber sicher im Inneren von $[x_1, x_3]$ zu finden ist, ist $f(x_2)$ auch ein relatives Minimum von f . Es gilt also die

Bemerkung 7.2: Eine stetige Funktion nimmt zwischen zwei relativen Maxima (bzw. Minima) stets ein relatives Minimum (bzw. Maximum) an.

Eine unstetige Funktion braucht diese Eigenschaft nicht zu haben, wie man an den Stellen x_4 und x_5 in Bild 7.3 erkennt.

7.3.2. Eine notwendige Bedingung (kritische Stellen)

Ein relativer Extremwert $f(x_0)$ ist ein absoluter Extremwert der Funktion f bezüglich einer gewissen Umgebung von x_0 . Daher folgt aus Satz 6.1, angewandt auf diese Umgebung, der

¹⁾ Abkürzung für „im engeren Sinne“.

Satz 7.5: Die Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar und habe dort einen relativen Extremwert. Dann gilt **S. 7.5**

$$f'(x_0) = 0. \quad (7.17)$$

Die Bedingung (7.17) ist also notwendig dafür, daß die an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion dort einen relativen Extremwert hat; sie ist jedoch nicht hinreichend. So hat z. B. die Funktion $f(x) = x^3$ ($-\infty < x < +\infty$) an der Stelle $x_0 = 0$ keinen relativen Extremwert, obwohl $f'(0) = 0$ gilt. Andererseits kann eine Funktion auch an solchen Stellen einen relativen Extremwert haben, an denen sie nicht differenzierbar ist. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $f(x) = |x|$ ($-\infty < x < +\infty$), die an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist, dort aber ein relatives Minimum (i.e.S.) hat.

Es gibt somit zwei Arten von „extremwertverdächtigen“ Stellen; wir beschreiben sie durch die folgende

Definition 7.2: Eine Stelle x_0 im Inneren des Definitionsbereiches der Funktion f heißt **kritische Stelle** von f , wenn entweder f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt oder f in x_0 nicht differenzierbar ist. **D. 7.2**

In geometrischer Formulierung ist x_0 also genau dann eine kritische Stelle von f , wenn die Bildkurve von f an der Stelle x_0 entweder eine zur Abszissenachse parallele Tangente oder keine Tangente besitzt.

Aus dem Voranstehenden folgt nun die

Bemerkung 7.3: Jede relative Extremalstelle der Funktion f ist eine kritische Stelle von f .

Die Bilder 7.4a) bis 7.4f) zeigen einige typische Fälle des Verhaltens einer stetigen Funktion f in einer Umgebung einer kritischen Stelle x_0 . In den Fällen a) bis d) ist x_0 relative Extremalstelle von f ; in den Fällen e) und f) nicht.

Aus Bemerkung 7.3 ergibt sich das folgende *Verfahren zur Ermittlung der relativen Extremwerte einer Funktion f* :

1. Schritt: Ermittlung der kritischen Stellen von f .
2. Schritt: Untersuchung, welche kritischen Stellen tatsächlich relative Extremalstellen von f sind.
3. Schritt: Berechnung der relativen Extremwerte.

Beispiel 7.11: Gesucht sind die kritischen Stellen der Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Da f für jedes x differenzierbar ist, sind nur die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ kritische Stellen von f . Wegen

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}$$

und $e^{-x} \neq 0$ für alle x sind das die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Der zweite Schritt erfordert die Kenntnis hinreichender Bedingungen für das Vorliegen relativer Extremwerte. Damit werden wir uns in den beiden folgenden Abschnitten befassen.

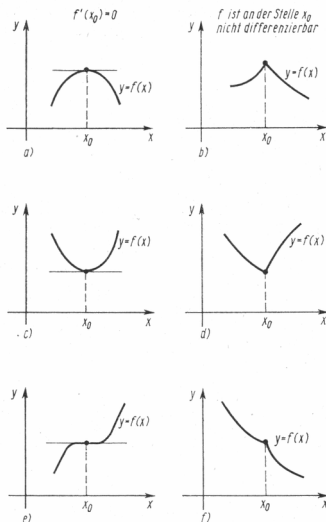


Bild 7.4 a-f

7.3.3. Eine hinreichende Bedingung

Mit dem folgenden Satz kann man eine Funktion auf das Vorliegen relativer Extremwerte an denjenigen kritischen Stellen untersuchen, in deren Umgebung sie hinreichend oft differenzierbar ist.

S. 7.6 Satz 7.6: Die Funktion f besitze in einer Umgebung U der Stelle x_0 stetige Ableitungen bis zur n -ten Ordnung ($n \geq 2$), und es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (7.18)$$

I. Ist n gerade, dann hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert, und zwar

im Fall $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 \\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}$ ein relatives $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ i. e. S.

II. Ist n ungerade, dann hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert, sondern in einer gewissen Umgebung von x_0 ist f

im Fall $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 \\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{cases}$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall

$$f^{(n)}(x_0) < 0;$$

im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$ schließt man analog.

(7.19)

Auf Grund der Voraussetzungen ist f für jedes $x \in U$ nach der Taylorsche Formel entwickelbar, wobei – mit dem Lagrangeschen Restglied $R_{n-1}(x)$ – wegen (7.18) gilt

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (7.20)$$

Da $f^{(n)}$ an der Stelle x_0 stetig ist, gibt es wegen (7.19) nach Satz 3.3 ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f^{(n)}(\tilde{x}) < 0 \quad \text{für alle} \quad \tilde{x} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U.$$

Wegen $0 < \vartheta < 1$ ist daher insbesondere

$$f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \quad (7.21)$$

I. Ist n gerade, dann ist $\frac{(x - x_0)^n}{n!} > 0$ für alle $x \neq x_0$. Damit folgt wegen (7.21) aus (7.20)

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), x \neq x_0,$$

d. h., $f(x_0)$ ist ein relatives Maximum i. e. S.

II. Ist n ungerade, dann ist

$$\frac{(x - x_0)^n}{n!} \begin{cases} < 0 & \text{für alle } x < x_0, \\ > 0 & \text{für alle } x > x_0. \end{cases}$$

Wegen (7.21) folgt daher aus (7.20)

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ < 0 & \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \end{cases}$$

so daß $f(x_0)$ sicher kein relativer Extremwert ist. Den Beweis der Monotonieaussage übergehen wir. ■

Zur Anwendung dieses Satzes auf eine kritische Stelle x_0 von f hat man die Funktion f so oft zu differenzieren, bis erstmalig eine Ableitung an dieser Stelle von null verschieden ist. Häufig trifft das bereits für die zweite Ableitung zu. Deshalb wollen wir Satz 7.6 für den Spezialfall $n = 2$ noch explizit notieren:

Folgerung 7.1: Die Funktion f besitze in einer Umgebung von x_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und es gelte

$$f'(x_0) = 0, \quad \text{aber} \quad f''(x_0) \neq 0.$$

Dann hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert, und zwar

im Fall $\begin{cases} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ ein relatives $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ i. e. S.

Beispiel 7.12: Gesucht sind die relativen Extremalstellen und Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Die Lösung erfolgt in drei Schritten (s. 7.3.2.):

1. Kritische Stellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (s. Beispiel 7.11).

2. a) $x_1 = 0$: Es gilt

$$f''(x) = (2 - 4x + x^2) e^{-x},$$

also $f''(0) = 2 > 0$. Nach Folgerung 7.1 hat f an der Stelle $x_1 = 0$ ein relatives Minimum i. e. S.

b) $x_2 = 2$: Wegen $f''(2) = -2e^{-2} < 0$ ist $x_2 = 2$ relative Maximumstelle i. e. S.

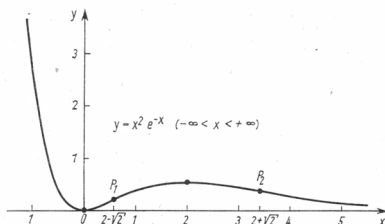


Bild 7.5

3. Relatives Maximum: $f(2) = 4e^{-2} = 0,54$. Relatives Minimum: $f(0) = 0$.

Bild 7.5 zeigt die Bildkurve von f . (Die Punkte P_1 und P_2 lassen wir zunächst außer acht.)

Beispiel 7.13: Gesucht sind die relativen Extremalstellen und Extremwerte der Funktion

$$f(x) = (x-1)^3(x-1) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

1. Kritische Stellen: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ (s. Aufgabe 4.11).

2. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$: Es gilt $f''(x) = 12x(x-1)$, also $f''(-\frac{1}{2}) = 9 > 0$. Nach Folgerung 7.1 hat f an der Stelle $x_1 = -\frac{1}{2}$ ein relatives Minimum i. e. S.

b) $x_2 = 1$: Wegen $f''(1) = 0$ differenziert man weiter und erhält $f'''(x) = 24x - 12$, also $f'''(1) = 12 \neq 0$. Da die erste an der Stelle $x_2 = 1$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader (nämlich dritter) Ordnung ist, hat f nach Satz 7.6 an der Stelle $x_2 = 1$ keinen relativen Extremwert. (Wegen $f'''(1) > 0$ ist f in einer gewissen Umgebung von $x_2 = 1$ streng monoton wachsend.)

3. Relatives Minimum: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{16} = -1,69$. Relatives Maximum: nicht vorhanden (s. Bild 7.6).

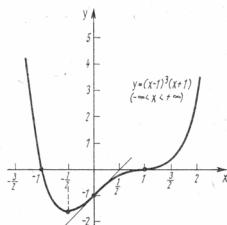


Bild 7.6

* **Aufgabe 7.6:** Ermitteln Sie die relativen Extremalstellen und Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4 \cos x + \cos 2x \quad (-\infty < x < +\infty),$

b) $f(x) = x^3 e^{-x} \quad (-\infty < x < +\infty).$

7.3.4. Eine weitere hinreichende Bedingung

Der folgende Satz ist auch dann anwendbar, wenn die Funktion f nur in einer punktierten Umgebung von x_0 differenzierbar, aber an der Stelle x_0 noch stetig ist. Ein weiterer Vorteil dieses Satzes besteht darin, daß nur die erste Ableitung von f benötigt wird.

Satz 7.7: Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so daß die Funktion f auf dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ S. 7.7 stetig und dort – evtl. mit Ausnahme der Stelle x_0 selbst – differenzierbar ist.

I. Ist $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ für jedes $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$ für jedes $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$,

dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ i. e. S.

II. Ist $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ für jedes $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $x \neq x_0$,

dann hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert, sondern f ist auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$.

Dieses Kriterium kann man qualitativ auch so formulieren:

I. Wechselt f' beim Übergang über die Stelle x_0 von links nach rechts das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von plus nach minus} \\ \text{von minus nach plus} \end{cases}$, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ i. e. S. (s. Bild 7.7).

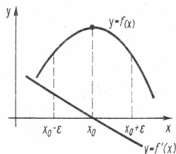


Bild 7.7

II. Wechselt f' bei diesem Übergang das Vorzeichen nicht, dann hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert.

Satz 7.7 folgt unmittelbar aus Satz 7.4: Ist $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton wachsend und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton fallend. Folglich ist $f(x_0)$ der größte Wert, den die Funktion f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ annimmt. Entsprechend schließt man in den anderen Fällen. Man betrachte hierzu noch einmal die Bilder 7.4a) bis 7.4f).

Beispiel 7.14¹⁾: Gesucht sind die relativen Extremalstellen und Extremwerte der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \quad (x \geq -2).$$

¹⁾ Dieses Beispiel ist, in abgeänderter Form, [11] entnommen.

1. Der Radikand verschwindet an den Stellen $x = -2$ und $x = 0$ (und nur an diesen); dort kann man f also nicht in der üblichen Weise nach der Kettenregel differenzieren (vgl. Bemerkung 4.1). Die Stelle $x = -2$ ist als Randpunkt von $D(f)$ nicht kritisch. Jedoch $x = 0$ liegt im Inneren von $D(f)$, und f ist dort eventuell nicht differenzierbar. Man braucht nun nicht erst nachzuprüfen, ob das tatsächlich zutrifft, $x = 0$ also eine kritische Stelle von f ist. Vielmehr wird man diese Stelle sogleich als „extremwertverdächtig“ unter 2. weiter untersuchen. Zur Ermittlung weiterer kritischer Stellen ist f zu differenzieren; man erhält

$$f'(x) = \frac{x(3x+4)}{3(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (x > -2, x \neq 0). \quad (7.22)$$

Die einzige Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ ist $x = -\frac{4}{3}$.

2. a) $x_1 = -\frac{4}{3}$: Aus (7.22) liest man ab:

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad -2 < x < -\frac{4}{3},$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad -\frac{4}{3} < x < 0.$$

Da f' beim Überschreiten der Stelle $x_1 = -\frac{4}{3}$ von links nach rechts das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, hat f nach Satz 7.7 dort ein relatives Maximum i. e. S.

b) $x_2 = 0$: Auch auf diese Stelle ist Satz 7.7 (jedoch nicht Satz 7.6) anwendbar. Man kann in diesem Fall aber auch so schließen: Wegen $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0, x > -2$, $x = 0$ ist relative Minimumstelle i. e. S.

3. Relatives Maximum: $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} = 1,06$. Relatives Minimum: $f(0) = 0$.

Die Bildkurve von f ist in Bild 7.8 skizziert. (Die Bedeutung der Geraden $y = x + \frac{2}{3}$ wird in 7.6 erläutert.)

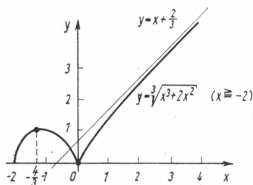


Bild 7.8

- * **Aufgabe 7.7:** Ermitteln Sie unter Verwendung von Satz 7.7 die relativen Extremalstellen und Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x+1)^5(x-2) \quad (-\infty < x < +\infty),$

b) $f(x) = x|x-1| \quad (-\infty < x < +\infty).$

7.4. Absolute Extremwerte

7.4.1. Ermittlung absoluter Extremwerte

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f kann einen absoluten Extremwert auf I an einem Randpunkt von I (sofern dieser zu I gehört) oder an einer Stelle x_0 im Inneren von I annehmen. Im letzteren Fall ist $f(x_0)$ auch ein relativer Extremwert von f . (Die in Bild 7.9 dargestellte Funktion f hat auf $[a, b]$ das absolute Minimum

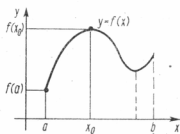


Bild 7.9

$f(a)$ und das absolute (und zugleich relative) Maximum $f(x_0)$.) Daraus ergibt sich das folgende Verfahren zur Ermittlung der absoluten Extremwerte einer Funktion f auf einem Intervall I :

1. Ermittlung der zu I gehörigen relativen Extremwerte von f .
2. Untersuchung des „Randverhaltens“ von f .

Mit 2. ist Folgendes gemeint: Ist $I = [a, b]$, dann berechne man die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$. Ist $I = (a, +\infty)$, dann untersuche man die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Entsprechend ist für andere Intervalle zu verfahren.

Da relative Extremwerte stets an kritischen Stellen angenommen werden, kann man 1. auch ersetzen durch

- 1*. Ermittlung der Funktionswerte an allen zu I gehörigen kritischen Stellen von f .

Falls die Funktion f auf dem Intervall I überhaupt absolute Extremwerte besitzt¹⁾, sind diese unter den nach 1. (bzw. 1*.) und 2. ermittelten Funktionswerten zu finden. Gelegentlich kann man auch den folgenden Satz anwenden, dessen (indirekter) Beweis sich kaum von dem der Bemerkung 7.2 unterscheidet.

Satz 7.8: Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und hat sie dort an genau einer Stelle x_0 einen relativen Extremwert, dann ist $f(x_0)$ auch ein absoluter Extremwert von f auf I . S. 7.8

Beispiel 7.15: Gesucht sind die absoluten Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$ auf dem Intervall $[1, +\infty)$.

Der einzige zum Intervall $[1, +\infty)$ gehörige relative Extremwert von f ist das relative Maximum $f(2) = 4e^{-2}$ (s. Beispiel 7.12), das daher nach Satz 7.8 auch das absolute Maximum von f auf $[1, +\infty)$ ist.

Das absolute Minimum könnte nur an dem Randpunkt $x = 1$ angenommen werden. Nun gilt $f(1) = e^{-1} > 0$, aber (s. Beispiel 7.4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Somit hat f auf $[1, +\infty)$ kein absolutes Minimum (s. Bild 7.5).

¹⁾ Das ist durch Satz 3.8 nur für den Fall gesichert, daß $I = [a, b]$ gilt und f auf I stetig ist.

- * **Aufgabe 7.8:** Ermitteln Sie die absoluten Extremwerte der Funktion

$$f(x) = (x + 3)^2 (x - 2)^3$$

auf dem Intervall $[-2, 3]$.

7.4.2. Einige Anwendungen

Viele praktische Probleme führen auf die Aufgabe, das absolute Maximum oder Minimum einer Funktion auf einem Intervall zu ermitteln. Häufig interessieren vor allem die Stellen, an denen ein absoluter Extremwert angenommen wird. Wir behandeln einige Beispiele.

Beispiel 7.16: Die Bahnkurve für den schrägen Wurf ist – bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes – die Parabel (s. Bild 7.10)

$$y = f(x) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$: Wurfwinkel, v_0 : Anfangsgeschwindigkeit, g : Erdbeschleunigung). Gesucht ist

a) die Wurfhöhe $y_H = f(x_H)$,

b) derjenige Winkel α_0 , für den die Wurfweite x_W am größten ist.

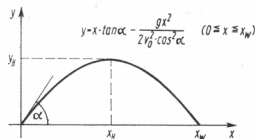


Bild 7.10

Zu a): y_H ist das absolute Maximum der Funktion f auf dem Intervall $[0, x_W]$, wobei sich $x_W > 0$ aus $f(x_W) = 0$ zu

$$x_W = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (7.23)$$

ergibt. Es gilt

$$f'(x) = \tan \alpha - \frac{2gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (0 < x < x_W),$$

also $f'(x) = 0$ nur für

$$x_H = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x_W}{2}.$$

Wegen $f''(x) = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} < 0$ (für alle x) hat f an der Stelle x_H ein relatives Maximum; dieses ist

$$y_H = f(x_H) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Als einziger relativer Extremwert von f ist y_H nach Satz 7.8 zugleich das absolute Maximum von f auf $[0, x_W]$.

Zu b): α_0 ist diejenige Stelle, an der die durch (7.23) gegebene Funktion $x_W(\alpha)$ ihr absolutes Maximum auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ annimmt. Die Gleichung

$$\frac{dx_W}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

hat die einzige Lösung $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Wegen

$$\left. \frac{d^2 x_W}{d\alpha^2} \right|_{\alpha = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

hat $x_W(\alpha)$ an der Stelle $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ ein relatives Maximum, das – wiederum nach Satz 7.8 – auch das absolute Maximum auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist. Der optimale Wurfinkel ist also $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Beispiel 7.17: In einer Ebene seien eine Gerade g und zwei auf derselben Seite von g gelegene Punkte A und B gegeben. Gesucht ist derjenige Punkt P auf g , für den die Abstandssumme $\overline{AP} + \overline{PB}$ am kleinsten ist.

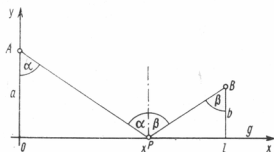


Bild 7.11

Nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems (s. Bild 7.11) gilt für die Abstandssumme

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}.$$

Die positiven Konstanten a , b und l sind bekannt. Gesucht ist die Stelle $x = x_0$, an der die Funktion f ihr absolutes Minimum auf dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ annimmt. Wegen

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

ist die Gleichung $f'(x) = 0$ äquivalent zu

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}. \quad (7.24)$$

Aus (7.24) folgt durch Quadrieren und eine einfache Umformung $b^2 x^2 = a^2 (l-x)^2$ und daraus

$$bx = a(l-x) \quad (7.25a)$$

oder

$$bx = -a(l-x). \quad (7.25b)$$

Aus (7.25b) folgt umgekehrt aber nicht (7.24), denn genügt x der Gleichung (7.25b), dann haben x und $(l - x)$ verschiedene Vorzeichen, was der Gleichung (7.24) widerspricht. Dagegen ist die Lösung von (7.25a), nämlich

$$x_0 = \frac{al}{a+b},$$

auch Lösung von (7.24), wie man leicht durch Einsetzen bestätigt. Somit ist x_0 die einzige kritische Stelle von f , und wegen

$$f''(x) = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2^3}} > 0$$

hat f dort ein relatives Minimum, das nach Satz 7.8 auch das absolute Minimum von f auf $(-\infty, +\infty)$ ist.

Wir geben noch zwei Interpretationen dieses geometrischen Problems.

1. Ein von A ausgehender und an g (Spiegel) reflektierter Lichtstrahl, der in B ankommen soll, wählt den Weg der kürzesten Laufzeit (Fermatsches Prinzip). Bei konstanter Geschwindigkeit (homogenes Medium) ist das der kürzeste Weg. In diesem Fall wird der Lichtstrahl also im Punkt $P(x_0, 0)$ reflektiert. Für x_0 gilt (7.24), d. h. (s. Bild 7.11) $\sin \alpha = \sin \beta$, also $\alpha = \beta$. Aus dem Fermatschen Prinzip folgt somit das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel“.
2. Zur Energieversorgung der Orte A und B soll an dem geradlinig verlaufenden Fluß g ein Kraftwerk gebaut werden. Die Gesamtlänge der von dem Kraftwerk nach A und B zu verlegenden Leitungen ist genau dann minimal, wenn dieses an der Stelle $P(x_0, 0)$ errichtet wird.

* **Aufgabe 7.9:** Ermitteln Sie den Grundkreisradius r_0 und die Höhe h_0 derjenigen zylindrischen Dose, die bei vorgeschriebenem Volumen V eine möglichst kleine Oberfläche S hat (geringster Materialverbrauch).

* **Aufgabe 7.10:** Die Genauigkeit der Widerstandsmessung mit einer Wheatstoneschen Brücke (s. Aufgabe 5.6) hängt von der Kontakteinstellung x ab und läßt sich daher durch die Wahl des Vergleichswiderstandes R beeinflussen. Für welchen Wert \bar{x} ist der in der Lösung von Aufgabe 5.6 angegebene Näherungswert für den relativen Fehler $\left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right|$ am kleinsten?

* **Aufgabe 7.11:** Ein Ort A soll regelmäßig mit Waren aus einem Ort B , der an einer geradlinigen Eisenbahnlinie g liege (s. Bild 7.12), versorgt werden. Die Transportkosten pro Kilometer und Wareneinheit seien α bei Straßentransport und β bei Bahntransport. Es gelte $\alpha > \beta$. An welcher Stelle P zwischen A_1 und B ist von g eine geradlinige Straße nach A abzuzweigen, damit die Kosten für den Transport einer Wareneinheit von B über P nach A möglichst gering sind? (Die Strecken a und l seien in km gegeben.)

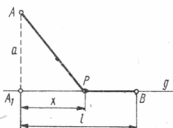


Bild 7.12

7.5. Konvexität und Wendepunkte

7.5.1. Konvexe und konkave Funktionen

Wir erinnern an den Begriff der Konvexität (s. Band 1, Abschnitt 9.3.). Die Funktion f heißt auf dem Intervall $I \subset D(f)$ **konvex**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und jedes $\alpha \in (0, 1)$ die Ungleichung

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \quad (7.26)$$

erfüllt ist. Gilt dagegen statt (7.26) stets

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2), \quad (7.27)$$

so heißt f auf I **konkav**. Gilt in (7.26) für $x_1 \neq x_2$ sogar stets $<$ statt \leq , so nennt man f auf I **streng konvex**; analog sind **streng konkave** Funktionen definiert.

Zur geometrischen Interpretation der Konvexität betrachten wir zwei Stellen $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ ist dann

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$$

ein Punkt aus dem Intervall (x_1, x_2) . Weiter ist

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2) =: f_s(x)$$

der Wert der zum Intervall $[x_1, x_2]$ gehörigen Sekantenfunktion an der Stelle x . Die Ungleichung (7.26) lautet somit

$$f(x) \leq f_s(x),$$

d. h., die Bildkurve von f liegt nicht oberhalb der zu dem (beliebig in I gelegenen) Intervall $[x_1, x_2]$ gehörigen Sekante (s. Bild 7.13a). Analog ist die Konkavität zu interpretieren (s. Bild 7.13b).

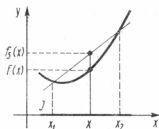


Bild 7.13 a

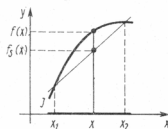


Bild 7.13 b

Für differenzierbare Funktionen kann man Konvexität und Konkavität auch durch die Lage der Tangenten zur Bildkurve charakterisieren.

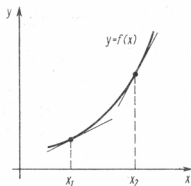


Bild 7.14 a

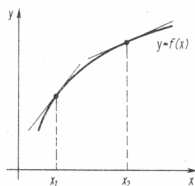


Bild 7.14 b

Bemerkung 7.4: Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Genau dann ist f auf I konvex (bzw. konkav), wenn jeder Punkt der Bildkurve von f oberhalb (bzw. unterhalb) jeder Tangente oder höchstens auf derselben gelegen ist (s. Bild 7.14a bzw. 7.14b).

Bild 7.14a läßt vermuten, daß bei einer konvexen Funktion f der Anstieg der Tangente im Punkt $P(x, f(x))$ mit wachsendem x zunimmt, daß also f' monoton wachsend ist. Tatsächlich gilt der

S. 7.9 Satz 7.9: Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Genau dann ist f auf I (streng) $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$, wenn f' auf I (streng) monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ ist.

Mit den Sätzen 7.3 und 7.4, angewandt auf die Funktion f' , erhält man aus Satz 7.9 die folgenden Konvexitätskriterien.

S. 7.10 Satz 7.10: Die Funktion f habe auf dem Intervall I eine stetige erste Ableitung und auf dem Innern von I eine zweite Ableitung.

I. Genau dann ist f auf I $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$, wenn gilt

$$\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases} \text{ für jedes } x \text{ aus dem Inneren von } I.$$

II. Gilt

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases} \text{ für jedes } x \text{ aus dem Inneren von } I,$$

dann ist f auf I streng $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$.

Beispiel 7.18: Für die Funktion

$$f(x) = (x - 1)^3 (x + 1) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

gilt (s. Beispiel 7.13)

$$f''(x) = 12x(x - 1) \begin{cases} > 0 & \text{für } x < 0 \quad \text{und für } x > 1, \\ < 0 & \text{für } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Nach Satz 7.10 ist f auf $(-\infty, 0]$ und $[1, +\infty)$ streng konvex und auf $[0, 1]$ streng konkav (s. Bild 7.6).

* **Aufgabe 7.12:** Untersuchen Sie das Konvexitätsverhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

7.5.2. Wendepunkte

Zur Hervorhebung derjenigen Stellen, an denen die „Änderungsgeschwindigkeit“ einer Funktion ein relatives Maximum oder Minimum hat, geben wir die folgende

D. 7.3 Definition 7.3: Die Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** (der Bildkurve) von f , wenn die Ableitung f'

an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert i. e. S. hat. Die Tangente in einem Wendepunkt heißt **Wendetangente**; ist diese horizontal (gilt also $f'(x_0) = 0$), dann heißt $(x_0, f(x_0))$ **Horizontalwendepunkt** oder **Stufenpunkt**.

Aus Satz 7.9 erhält man unmittelbar die folgende geometrische Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes.

Satz 7.11: Die Funktion f sei auf einem Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, differenzierbar. Ist f auf $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konvex und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ streng konkav oder umgekehrt, dann ist der Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ ein Wendepunkt von f (s. Bild 7.15 a und 7.15 b¹⁾). S. 7.11

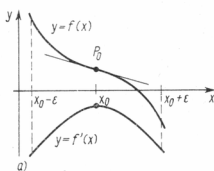


Bild 7.15 a

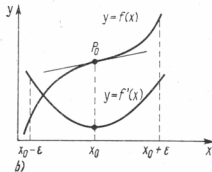


Bild 7.15 b

Nach Satz 7.11 hat die in Beispiel 7.18 betrachtete Funktion f die Wendepunkte $P_1(0, -1)$ und $P_2(1, 0)$. Zu P_1 gehört die Wendetangente $y = -1 + 2x$ [s. (4.17)]; P_2 ist wegen $f'(1) = 0$ ein Horizontalwendepunkt mit der Wendetangente $y = 0$ (s. Bild 7.6).

Beispiel 7.19: Bild 7.16 zeigt die Bildkurve der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ einer geradlinigen Bewegung. Im Wendepunkt P_0 geht diese Kurve mit zunehmender Zeit t aus einem konvexen in einen konkaven Verlauf über. Daher hat die Geschwindigkeit $v = \dot{s}$ zur Zeit t_0 ein relatives Maximum (vgl. Bild 7.15 a).

Aus Bemerkung 7.3 und Satz 7.6, angewandt auf f' , erhält man sofort die beiden folgenden Kriterien für das Vorliegen eines Wendepunktes.

Bemerkung 7.5: Die Funktion f kann nur dann an der Stelle x_0 einen Wendepunkt haben, wenn entweder $f''(x_0) = 0$ ist oder die 2. Ableitung von f an der Stelle x_0 nicht existiert.

Diese notwendige Bedingung ist aber nicht hinreichend. So hat z. B. die Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle $x = 0$ keinen Wendepunkt (sondern ein relatives Minimum), obwohl $f''(0) = 0$ ist.

Satz 7.12: Die Funktion f besitze in einer Umgebung der Stelle x_0 stetige Ableitungen bis zur n -ten Ordnung ($n \geq 3$), und es gelte S. 7.12

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (7.28)$$

Ist n ungerade, dann hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, andernfalls nicht.

¹⁾ Man beachte auch den Zusammenhang zwischen der Monotonie von f und dem Vorzeichen von f' (s. Satz 7.4).

Beispiel 7.20: Die Van-der-Waalsche Zustandsgleichung eines realen Gases lautet

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (v > b) \quad (7.29)$$

(T : Temperatur, v : Molvolumen, p : Druck, R : allgemeine Gaskonstante, a und b : gasspezifische Konstanten). Bei konstanter Temperatur T ist der Druck p eine Funktion des Volumens v , deren Bildkurve *Isotherme* heißt. Aus physikalischen Überlegungen folgt die Existenz einer Isotherme $T = T_k$ mit einem Horizontalwendepunkt K . In Bild 7.17 sind drei typische Isothermen schematisch dargestellt. Dabei ist

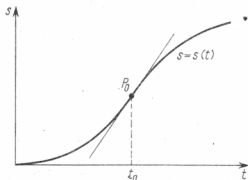


Bild 7.16

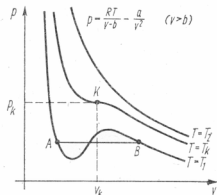


Bild 7.17

$T_1 < T_k < T_2$. (Das tatsächliche Verhalten des Stoffes zwischen den Punkten A und B wird durch ein zur v -Achse paralleles Geradenstück beschrieben.) Wir wollen nun die Existenz eines Horizontalwendepunkts K mathematisch beweisen und K ermitteln. Die notwendigen Bedingungen

$$\frac{dp}{dv} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2p}{dv^2} = 0$$

lauten wegen (7.29) mit $T = T_k$

$$-\frac{RT_k}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{2RT_k}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0.$$

Die einzige Lösung $v = v_k$ dieser Gleichungen ist $v_k = 3b$. Setzt man diesen Wert in eine der beiden Gleichungen ein, so erhält man $T_k = \frac{8a}{27Rb}$. Aus (7.29) folgt damit $p_k = \frac{a}{27b^2}$. Wegen

$$\left. \frac{d^3p}{dv^3} \right|_{v=v_k} = -\frac{6RT_k}{(v_k-b)^4} + \frac{24a}{v_k^5} = -\frac{a}{81b^5} \neq 0$$

ist $K(v_k, p_k)$ nach Satz 7.12 tatsächlich ein Wendepunkt. Man nennt die Größen T_k, v_k, p_k kritische Daten und den Punkt K kritischen Punkt.

- * **Aufgabe 7.13:** Ermitteln Sie Wendepunkt(e) und zugehörige Wendetangente(n) der Funktion $f(x) = x^2 \ln x$ ($x > 0$).

7.6. Kurvendiskussion

Bisher haben wir die Bildkurven von Funktionen skizziert, ohne auf die Anfertigung solcher Skizzen einzugehen. Damit wollen wir uns nun befassen. Man untersucht dazu die vorgelegte Funktion auf folgende Eigenschaften:

1. Unstetigkeitsstellen (s. 3.3.),
2. Monotonieintervalle (s. 7.2.),
3. Relative Extremwerte (s. 7.3.),
4. Konvexitätsintervalle (s. 7.5.1.),
5. Wendepunkte (s. 7.5.2.),
6. Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$, Asymptoten (s. unten).

Auf Grund dieser sog. Kurvendiskussion ist der prinzipielle Verlauf der Bildkurve bekannt. Um die Genauigkeit der Skizze zu erhöhen, wird man im allgemeinen noch einige Funktionswerte und die Nullstellen der Funktion berechnen. Gelegentlich kann man auch Periodizitäts- oder Symmetrieeigenschaften der gegebenen Funktion ausnutzen.

Wir müssen noch den Begriff der Asymptote definieren. Ist die Funktion f für eine der „Bewegungen“ $x \rightarrow x_0 + 0$ oder $x \rightarrow x_0 - 0$ bestimmt divergent, dann heißt die Gerade

$$x = x_0$$

(vertikale) **Asymptote** oder **Sperrgerade** (der Bildkurve) von f für diese „Bewegung“ von x . Eine Gerade

$$y = ax + b \quad (7.30)$$

heißt (geneigte) **Asymptote** (der Bildkurve) von f für $x \rightarrow +\infty$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \quad (7.31)$$

Entsprechendes gilt für $x \rightarrow -\infty$. Anschaulich gesprochen ist eine Asymptote also eine Gerade, der die Bildkurve von f bei der betrachteten „Bewegung“ von x beliebig nahe kommt (s. Bild 7.18 a für die „Bewegung“ $x \rightarrow x_0 - 0$ und Bild 7.18 b für die „Bewegung“ $x \rightarrow +\infty$).

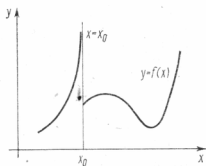


Bild 7.18 a

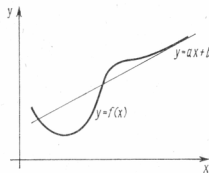


Bild 7.18 b

Nun sei die Gerade (7.30) Asymptote der Bildkurve von f für $x \rightarrow +\infty$. Zur Ermittlung der Konstanten a und b schreiben wir (7.31) in der Form

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) \right] = 0.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$$

und daraus wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (7.32)$$

Ferner erhält man aus (7.31) unmittelbar

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]. \quad (7.33)$$

Aus (7.33) folgt umgekehrt (7.31). Es gilt also die

Bemerkung 7.6: Die Bildkurve von f besitzt genau dann eine Asymptote für $x \rightarrow +\infty$, wenn die Grenzwerte (7.32) und (7.33) existieren. Mit diesen Grenzwerten ist die Asymptote durch die Gleichung $y = ax + b$ gegeben.

Existiert speziell der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, dann folgt aus (7.32) $a = 0$ und damit aus (7.33) $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. In diesem Fall hat die Bildkurve von f also die (horizontale) Asymptote

$$y = b \quad (b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)). \quad (7.34)$$

Alle diese Überlegungen gelten entsprechend für $x \rightarrow -\infty$.

Mit dem Voranstehenden haben wir für beliebige (rationale und nichtrationale) Funktionen den Begriff der geradlinigen Asymptote definiert. Für gebrochen rationale Funktionen betrachtet man auch krummlinige Asymptoten. Hierauf wollen wir jetzt eingehen. Zunächst sei daran erinnert, daß für eine echt gebrochen rationale Funktion h stets

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

gilt (s. Aufgabe 2.6.).

Nun sei f eine unecht gebrochen rationale Funktion. Durch Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom kann man f in folgender Weise zerlegen:

$$f(x) = g(x) + h(x);$$

hierbei ist g eine ganze und h eine echt gebrochen rationale Funktion. Daraus ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0,$$

d. h., für $x \rightarrow +\infty$ kommt die Funktion f ihrem ganzen Teil g beliebig nahe. Deshalb nennt man g (krummlinige) **Asymptote von f für $x \rightarrow +\infty$** ; das gleiche gilt für $x \rightarrow -\infty$. Ist g speziell eine lineare Funktion, also $g(x) = ax + b$, dann ist g natürlich auch Asymptote von f im Sinne der durch (7.31) gegebenen Definition.

Für gebrochen rationale Funktionen ist die Ermittlung des Kurvenverlaufs mit Hilfe der Ableitungen häufig recht aufwendig. Andererseits liefert für solche Funk-

tionen eine genaue Analyse der Unstetigkeitsstellen sowie die Bestimmung von Nullstellen und Asymptoten im allgemeinen schon einen guten Einblick in den Kurvenverlauf. Ein entsprechendes Beispiel findet man in Aufgabe 7.14b).

Wir wollen nun zwei Kurvendiskussionen durchführen.

Beispiel 7.21: Zuerst untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

1. f ist für alle x stetig (und beliebig oft differenzierbar).

2. Wegen

$$f'(x) = x(2 - x)e^{-x} \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < x < 2, \\ < 0 & \text{für } x < 0 \text{ und für } x > 2 \end{cases}$$

ist f auf $[0, 2]$ streng monoton wachsend und auf $(-\infty, 0]$ und $[2, +\infty)$ streng monoton fallend.

3. Nach 2. hat f das relative Minimum $f(0) = 0$ und das relative Maximum $f(2) = 4e^{-2} = 0,54$ (s. auch Beispiel 7.12).

4. Es gilt $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Das Polynom $(x^2 - 4x + 2)$ hat die Nullstellen

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} = 0,59 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 + \sqrt{2} = 3,41.$$

Daher ist

$$f''(x) = (x - x_1)(x - x_2)e^{-x} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < x_1 \text{ und für } x > x_2, \\ < 0 & \text{für } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Somit ist f auf $(-\infty, x_1]$ und $[x_2, +\infty)$ streng konvex und auf $[x_1, x_2]$ streng konkav.

5. Nach 4. hat f die Wendepunkte $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$. Dabei ist $f(x_1) = 0,19$ und $f(x_2) = 0,38$.

6. Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (letzteres nach Beispiel 7.4). Für $x \rightarrow +\infty$ hat f also die Asymptote $y = 0$ [s. (7.34)]. Dagegen hat f wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$$

für $x \rightarrow -\infty$ keine Asymptote [s. (7.32)].

Wir berechnen noch die Funktionswerte $f(-1) = e = 2,72$ und $f(5) = 25e^{-5} = 0,17$ und beachten $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Nun kann man die Bildkurve von f recht genau skizzieren (s. Bild 7.5 in 7.3.3.).

Beispiel 7.22: Nun untersuchen wir die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$ ($x \geq -2$).

1. f ist auf $[-2, +\infty)$ stetig.

2. Wegen

$$f'(x) = \frac{x(3x + 4)}{3\sqrt[3]{x^3 + 2x^2}} \begin{cases} > 0 & \text{für } -2 < x < -\frac{4}{3} \text{ und für } x > 0, \\ < 0 & \text{für } -\frac{4}{3} < x < 0 \end{cases}$$

ist f auf $\left[-2, -\frac{4}{3}\right]$ und $[0, +\infty)$ streng monoton wachsend und auf $\left[-\frac{4}{3}, 0\right]$ streng monoton fallend.

3. Nach 2. hat f das relative Maximum $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} = 1,06$ und das relative Minimum $f(0) = 0$ (s. auch Beispiel 7.14).

4. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$f''(x) = -\frac{8}{9(x+2)^3\sqrt{x^3+2x^2}} \quad (x > -2, x \neq 0),$$

also $f''(x) < 0$ für $-2 < x < 0$ und für $x > 0$. Daher ist f auf $(-2, 0)$ und $(0, +\infty)$ jeweils streng konkav.

5. Nach 4. hat f keine Wendepunkte.

6. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = 1,$$

und nach der Lösung von Aufgabe 7.2b) ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \frac{2}{3}$. Daher ist die Gerade $y = x + \frac{2}{3}$ Asymptote von f für $x \rightarrow +\infty$.

Es empfiehlt sich, die Funktion noch auf (einseitige) Differenzierbarkeit an den Stellen $x = -2$ und $x = 0$ zu untersuchen (vgl. Beispiel 7.14). Der Differenzenquotient an der Stelle $x = 0$ ist

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2(h+2)} - 0}{h} \quad (h > -2, h \neq 0).$$

Nun sei $h < 0$. Dann ist $-h > 0$ und daher $-h = \sqrt[3]{(-h)^3}$. Damit erhält man

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\sqrt[3]{\frac{h^2(h+2)}{(-h)^3}} = -\sqrt[3]{\frac{h+2}{-h}} \quad (-2 < h < 0).$$

Unter Verwendung von Satz 2.4 folgt daraus

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\infty.$$

Die Bildkurve von f hat also an der Stelle $x = 0$ eine vertikale linksseitige Tangente (vgl. Beispiel 4.9). Analog stellt man fest, daß sie an den Stellen $x = 0$ und $x = -2$ auch eine vertikale rechtsseitige Tangente hat.

Bild 7.8 in 7.3.4. zeigt die Bildkurve von f .

* **Aufgabe 7.14:** Für die folgenden Funktionen ist eine Kurvendiskussion durchzuführen und die Bildkurve zu skizzieren:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9},$$

$$b) f(x) = \frac{x^2(x+2)^5}{(x-1)(x+1)^2(x+2)^2},$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0, \mu: \text{Konstanten}).^1)$$

Hinweis zu b): Es genügt, Unstetigkeitsstellen (genaue Klassifikation), Nullstellen, Asymptoten (einschl. Lage der Bildkurve von f zu diesen) und einige Funktionswerte zu bestimmen.

7.7. Näherungsweise Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$

7.7.1. Vorbemerkung

Die unterschiedlichsten Probleme führen auf die Aufgabe, die Lösungen einer Gleichung der Form

$$f(x) = 0,$$

also die Nullstellen der Funktion f , zu ermitteln. Als Beispiele aus der Mathematik seien hier nur die Bestimmung der kritischen Stellen einer Funktion (s. 7.3.2.) und die in Teil 2 zu behandelnde Partialbruchzerlegung gebrochen rationaler Funktionen genannt. Doch auch viele praktische Probleme laufen letzten Endes auf diese Aufgabe hinaus. Wir erinnern nur an die in Beispiel 4.8 erwähnte Balkenbiegung: Diejenige Kraft F , die den Bruch des Balkens bewirkt (die sog. Eulersche Knicklast), ergibt sich aus der kleinsten positiven Lösung der Gleichung

$$\tan x - x = 0.$$

Da in den meisten Fällen (wie auch in diesem Beispiel) eine formelmäßige Auflösung der gegebenen Gleichungen nicht möglich ist, kommt den *numerischen Verfahren* zur Lösung von Gleichungen eine große Bedeutung zu. Diese Verfahren bestehen darin, ausgehend von ein oder zwei (z. B. graphisch ermittelten) groben Näherungslösungen, sog. *Startwerten*, iterativ (d. h. schrittweise) immer genauere Näherungswerte x_n für die gesuchte Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ numerisch zu berechnen. Unter geeigneten Voraussetzungen konvergiert die nach einer gewissen Vorschrift konstruierte Folge (x_n) gegen ξ . Praktisch bedeutet das: Für hinreichend großes n (also nach hinreichend vielen Rechenschritten) unterscheidet sich x_n beliebig wenig von ξ .

Wir beschränken uns im folgenden auf die Formulierung von Konvergenzbedingungen, die leicht nachzuprüfen sind. Hinsichtlich weiterer Ausführungen sei auf Band 18 dieser Reihe verwiesen.

7.7.2. Regula falsi

Es sei f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist und den folgenden Bedingungen genügt:

(B 1) Es gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d. h., $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen).

¹⁾ Diese Funktion heißt Gaußsche Fehlerfunktion; sie spielt in der mathematischen Statistik eine wichtige Rolle.

(B 2) Die Ableitungen f' und f'' existieren und sind auf $[a, b]$ stetig.

(B 3) Für jedes $x \in [a, b]$ ist $f'(x) \neq 0$ und $f''(x) \neq 0$.

Aus (B 2) und (B 3) folgt nach Satz 3.9, daß f' und f'' auf $[a, b]$ das Vorzeichen nicht wechseln. Somit ist f auf $[a, b]$ streng monoton und entweder streng konvex oder streng konkav. Da f auf $[a, b]$ wegen der strengen Monotonie höchstens eine Nullstelle, aber wegen (B 1) nach Satz 3.9 auch mindestens eine Nullstelle besitzt, hat also die Gleichung $f(x) = 0$ genau eine Lösung $\xi \in (a, b)$.

Zur näherungsweisen Berechnung von ξ faßt man a und b als Startwerte auf und ermittelt diejenige Stelle x_1 , an der die zum Intervall $[a, b]$ gehörige Sekante an die Bildkurve von f die x -Achse schneidet. Entsprechend verfährt man nun mit demjenigen der beiden Teilintervalle $[a, x_1]$ oder $[x_1, b]$, an dessen Randpunkten die Werte von f verschiedene Vorzeichen haben: Man bezeichnet dieses Teilintervall mit $[p_2, q_2]$ und erhält als Schnittstelle der zugehörigen Sekante mit der x -Achse einen Wert x_2 usw. Allgemein schneidet die zum Intervall $[p_n, q_n]$ gehörige Sekante die x -Achse an der Stelle

$$x_n = p_n - f(p_n) \cdot \frac{p_n - q_n}{f(p_n) - f(q_n)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.35)$$

Dabei sind p_n und q_n rekursiv nach folgender Vorschrift zu ermitteln (s. Bild 7.19 und Bild 7.20):

$$p_1 := a, \quad q_1 := b. \quad (7.36a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Wenn } f(x_n) \cdot f(p_n) < 0, \text{ dann } p_{n+1} := p_n, \quad q_{n+1} := x_n. \\ \text{Wenn } f(x_n) \cdot f(q_n) < 0, \text{ dann } p_{n+1} := x_n, \quad q_{n+1} := q_n. \end{array} \right\} \quad (7.36b)$$

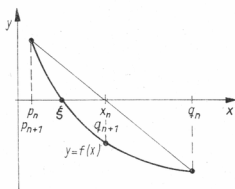


Bild 7.19

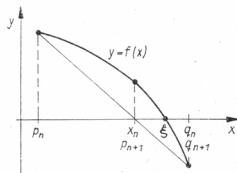


Bild 7.20

Das durch (7.35), (7.36a) und (7.36b) beschriebene Verfahren heißt *Regula falsi*¹⁾. Der folgende Satz bestätigt die Vermutung, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ gilt.

$n \rightarrow \infty$

S. 7.13 Satz 7.13: Die Funktion f genüge den Bedingungen (B 1), (B 2) und (B 3). Dann konvergiert die nach der Regula falsi ermittelte Folge (x_n) monoton gegen die Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

¹⁾ „Regula falsi“ (mittelalterliches Latein) bedeutet „Regel vom Falschen (ausgehend)“. Gemeint ist damit gerade, daß die Bildkurve von f durch eine „falsche“ Kurve – nämlich die Sekante – ersetzt wird.

Praktisch bricht man das Verfahren ab, sobald man einen Näherungswert x_n erhalten hat, der eine gewisse Genauigkeitsforderung erfüllt. Eine solche *Abbruchbedingung* ist z. B. die Forderung, daß $|f(x_n)|$ hinreichend klein ist; ein anderes häufig verwendetes Kriterium verlangt, daß sich x_n hinreichend wenig von x_{n-1} unterscheidet. Hierauf kann jedoch nicht näher eingegangen werden. Läßt man den Abbruchtest außer acht, so hat man zusammenfassend den folgenden

Algorithmus (Regula falsi):

1. Wähle ein Intervall $[a, b]$ so, daß (B 1), (B 2), (B 3) erfüllt sind.
2. Setze $n := 1$, $p_n := a$, $q_n := b$.
3. Berechne x_n nach (7.35).
4. Berechne p_{n+1} und q_{n+1} nach (7.36b).
5. Setze $n := n + 1$ und gehe zu 3. (Diese Anweisung bedeutet, daß der Wert der Indexvariablen n um 1 zu erhöhen ist.)

Für die Arbeit mit nichtprogrammierbaren Hilfsmitteln (Taschenrechnern) ist eine etwas andere Darstellung der Rekursionsformeln zur Berechnung von x_n zweckmäßig. Betrachten wir zuerst den Fall $f'(x) < 0$ und $f''(x) > 0$ für jedes $x \in [a, b]$ (s. Bild 7.19). Für jedes n ist dann offenbar $f(x_n) \cdot f(p_n) < 0$, also wegen (7.36b) und (7.36a) $p_{n+1} = a$, $q_{n+1} = x_n$, speziell $x_0 = q_1 = b$. Aus (7.35) mit $n + 1$ statt n folgt daher

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \\ x_{n+1} &= a - f(a) \frac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.37a)$$

Im Fall $f'(x) < 0$ und $f''(x) < 0$ für jedes $x \in [a, b]$ (s. Bild 7.20) erhält man entsprechend

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.37b)$$

Analoge Überlegungen in den anderen Fällen führen schließlich zu der

Bemerkung 7.7: Haben f' und f'' auf $[a, b]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{verschiedene Vorzeichen} \\ \text{dasselbe Vorzeichen} \end{array} \right\}$, dann ist die Folge (x_n) nach $\left\{ \begin{array}{l} (7.37a) \\ (7.37b) \end{array} \right\}$ berechenbar.

Beispiel 7.23: Gesucht ist ein Näherungswert für die Lösung ξ der Gleichung

$$x \ln x - \frac{1}{2} = 0. \quad (7.38)$$

Zuerst ermitteln wir graphisch, wo die Lösung ξ zu suchen ist. Dazu empfiehlt es sich, Gleichung (7.38) in der Form $\ln x = \frac{1}{2x}$ zu schreiben und die Funktionen $f_1(x) = \ln x$ ($x > 0$) und $f_2(x) = \frac{1}{2x}$ ($x > 0$) in demselben Koordinatensystem zu skizzieren. Die Abszisse des Schnittpunkts dieser beiden Kurven ist gerade die Lösung ξ von

(7.38). Aus der (groben) Skizze von Bild 7.21 liest man ab: $\xi \in (1; 2)$. Für die Funktion

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} \quad (x > 0) \quad (7.39)$$

gilt in der Tat $f(1) < 0$ und $f(2) > 0$. Für jedes $x \in [1; 2]$ ist ferner $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ und $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$. Die Funktion f genügt also auf $[1; 2]$ den Bedingungen (B 1), (B 2), (B 3), so daß die nach der Regula falsi zu ermittelnde Folge (x_n) gegen ξ konvergiert. Zur Verbesserung der Startwerte kann man noch $f(1, 5)$ berechnen und findet einen positiven Wert. Somit kann man die Regula falsi mit $a = 1$ und $b = 1,5$ anwenden. Wegen Bemerkung 7.7 ist dabei die Folge (x_n) nach (7.37 b) (mit f gemäß

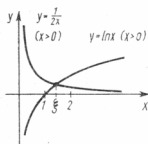


Bild 7.21

(7.39)) berechenbar. Die folgende Tabelle zeigt die mit einem Taschenrechner¹⁾ ermittelten numerischen Werte, wobei die erste Zeile für $n = -1$ die zur Berechnung benötigten Werte b und $f(b)$ enthält. Die Rechnung wurde „in einem Zuge“ durchgeführt, d. h., ein ermittelter Wert x_n wurde im Rechner belassen und sogleich zur Berechnung von x_{n+1} verwendet.

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|-------------|----------------|
| -1 | 1,5 | 0,108 197 67 |
| 0 | 1 | -0,5 |
| 1 | 1,411 050 6 | -0,014 126 594 |
| 2 | 1,421 322 9 | -0,000 279 893 |
| 3 | 1,421 525 9 | -0,000 005 512 |
| 4 | 1,421 529 9 | -0,000 000 114 |
| 5 | 1,421 529 9 | |

Wegen $x_5 = x_4$ „steht“ das Verfahren, d. h., im Rahmen der Rechnergenauigkeit ist eine weitere Verbesserung der Näherungswerte für ξ nicht möglich. Natürlich darf man aus der Übereinstimmung von x_5 und x_4 nicht den Schluß ziehen, daß damit die ersten 8 Stellen von ξ exakt bekannt seien: Aussagen über die Genauigkeit der Näherungswerte wären nur auf Grund von Fehlerabschätzungen möglich, auf die jedoch an dieser Stelle nicht eingegangen werden kann (vgl. aber 7.7.4.) Wir schreiben daher auch nur $\xi \approx 1,421\,5299$. Unter der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$ hätte man das Verfahren mit dem Wert x_3 abgebrochen und $\xi \approx 1,421$ geschrieben.

¹⁾ Alle numerischen Rechnungen in Abschnitt 7.7, wurden mit einem elektronischen Taschenrechner vom Typ MR 610 durchgeführt.

7.7.3. Das Newtonsche Verfahren

Es sei wieder f eine Funktion, die auf einem Intervall $[a, b]$ den Bedingungen (B 1), (B 2), (B 3) genügt und somit genau eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$ hat (s. 7.7.2.). Das *Newtonsche Verfahren* zur näherungsweisen Berechnung von ξ beruht auf folgender Überlegung: Als ersten Näherungswert für ξ wählt man ein gewisses $x_0 \in [a, b]$. Die Tangente an die Bildkurve von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ihr Schnittpunkt mit der x -Achse ergibt sich daraus zu

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Entsprechend verfährt man nun mit x_1 usw. (s. Bild 7.22). Allgemein schneidet die Tangente im Punkt $(x_n, f(x_n))$ die x -Achse an der Stelle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.40)$$

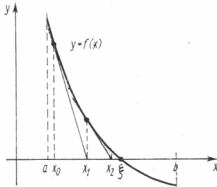


Bild 7.22

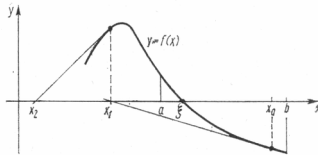


Bild 7.23

Im Falle von Bild 7.22 läßt die Anschauung vermuten, daß die durch (7.40) rekursiv definierte Folge (x_n) (monoton) gegen ξ konvergiert. Bild 7.23 zeigt jedoch, daß das nicht immer zutrifft. Die Ursache hierfür liegt offenbar in der Wahl des Startwertes x_0 . Genaue Auskunft über diesen Sachverhalt gibt der folgende

Satz 7.14: Die Funktion f genüge den Bedingungen (B 1), (B 2) und (B 3) (s. 7.7.2.). S 7.14 Wählt man $x_0 \in [a, b]$ so, daß $f(x_0)$ dasselbe Vorzeichen wie f'' auf $[a, b]$ hat, dann konvergiert die durch (7.40) definierte Folge (x_n) monoton gegen die einzige Lösung $\xi \in (a, b)$ der Gleichung $f(x) = 0$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den in Bild 7.22 veranschaulichten Fall 7.35d. In den anderen Fällen schließt man analog. Da $f'''(x) > 0$ ist, wählen wir ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$. Da f streng monoton fallend ist, gilt $x_0 < \xi$. Wegen der Konvexität von f liegt die zum Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehörige Tangente an die Bildkurve von f unterhalb der Bildkurve (s. Bemerkung 7.4), speziell an der Stelle ξ also unterhalb der x -Achse. Da sie an der Stelle x_0 oberhalb der x -Achse liegt, gilt für ihren Schnittpunkt x_1 mit der x -Achse

$$x_0 < x_1 < \xi,$$

Aus der Monotonie von f folgt $f(x_1) > f(\xi) = 0$, so daß man für die Tangente im Punkt $(x_1, f(x_1))$ entsprechend schließen kann. Allgemein findet man durch vollständige Induktion

$$x_n < x_{n+1} < \xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Als monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge hat (x_n) einen Grenzwert $\tilde{x} \in [x_0, \xi]$. Es ist noch $\tilde{x} = \xi$ zu zeigen. Da f und f' an der Stelle \tilde{x} stetig sind, folgt aus (7.40) für $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$$

und daraus $f(\tilde{x}) = 0$. Da aber ξ die einzige Nullstelle von f auf $[a, b]$ ist, muß $\tilde{x} = \xi$ sein. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Betrachten wir noch einmal Bild 7.23. Für die dort skizzierte Funktion f gilt $f''(x) > 0$ für jedes $x \in [a, b]$ (f ist auf $[a, b]$ streng konvex), aber es ist $f(x_0) < 0$. Die „Vorzeichenregel“ ist also verletzt¹⁾.

Lassen wir den Abbruchtest außer acht, so haben wir den folgenden

Algorithmus (Newtonsches Verfahren):

1. Wähle ein Intervall $[a, b]$ so, daß (B 1), (B 2), (B 3) erfüllt sind. Wähle $x_0 \in [a, b]$ so, daß $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (vgl. Fußnote).
2. Setze $n := 0$.
3. Berechne x_{n+1} nach (7.40).
4. Setze $n := n + 1$ und gehe zu 3.

Ohne Beweis teilen wir mit, daß das Newtonsche Verfahren im allgemeinen mit weniger Rechenschritten brauchbare Näherungswerte x_n liefert als die Regula falsi. Man wird es also stets dann der letztgenannten Methode vorziehen, wenn die Berechnung der Werte $f'(x_n)$ nicht zu aufwendig ist. Das trifft z. B. auf algebraische Gleichungen zu, bei denen man die Werte $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ nach dem Hornerischen Schema berechnen kann.

Beispiel 7.24: Für die Lösung ξ der Gleichung

$$x \ln x - \frac{1}{2} = 0$$

soll nach dem Newtonschen Verfahren ein Näherungswert berechnet werden. Wie in Beispiel 7.23 stellt man fest, daß man $a = 1$ und $b = 1,5$ setzen kann. Für die Funktion $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}$ ($x > 0$) ist $f(1) < 0$, $f(1,5) > 0$ und $f''(x) > 0$ für jedes $x \in [1; 1,5]$. Daher wählen wir $x_0 = 1,5$ als Startwert. Die Rekursionsformel (7.40) lautet in diesem Falle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \ln x_n - 0,5}{1 + \ln x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

¹⁾ Diese Regel ist jedoch nicht notwendig für die Konvergenz von (x_n) gegen ξ . So kann man etwa in dem folgenden Beispiel 7.24 auch $x_0 = 1$ wählen. Beim Arbeiten mit programmierbaren Rechnern prüft man i. allg. diese Regel nicht nach, sondern setzt für x_0 versuchsweise geeignete Werte ein.

Man erhält die folgenden numerischen Werte:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|-------------|---------------|
| 0 | 1,5 | 0,108 197 67 |
| 1 | 1,423 016 5 | 0,002 010 174 |
| 2 | 1,421 530 5 | 0,000 000 79 |
| 3 | 1,421 530 0 | 0,000 000 003 |
| 4 | 1,421 530 0 | |

Damit „steht“ das Verfahren bereits, und man hat $\xi \approx 1,421\,530\,0$. Bezüglich der Genauigkeit sei auf die Diskussion im Anschluß an die Tabelle von Beispiel 7.23 verwiesen.

Beispiel 7.25: Nach dem Newtonschen Verfahren soll ein Näherungswert für die kleinste positive Lösung ξ der Gleichung

$$\tan x - x = 0$$

berechnet werden (vgl. 7.7.1.).

Einen Hinweis auf die Lage von ξ entnimmt man wieder einer Skizze; aus Bild 7.24 liest man ab, daß ξ bei 4,5 gelegen ist.

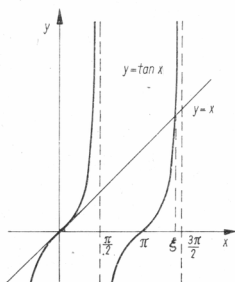


Bild 7.24

In der Praxis verzichtet man häufig auf das Überprüfen der Bedingungen (B 1), (B 2), (B 3) und der „Vorzeichenregel“. Wir wollen hier ebenso verfahren und wählen sogleich $x_0 = 4,5$ als Startwert. Die weiteren Näherungswerte x_n sind nach (7.40) mit $(x) = \tan x - x$, $f'(x) = \tan^2 x$ aus der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.41)$$

zu berechnen. Man erhält die folgenden Werte:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|-----------|-------------|
| 0 | 4,5 | 0,137 329 |
| 1 | 4,493 614 | 0,004 127 6 |
| 2 | 4,493 41 | 0,000 000 4 |
| 3 | 4,493 41 | |

Aus der Tabelle liest man ab, daß $\xi \approx 4,493\,41$ ist.

An diesem Beispiel läßt sich aber auch demonstrieren, daß bei ungünstiger Wahl des Startwertes x_0 die Folge (x_n) von der Lösung ξ „weglaufen“ kann (vgl. Bild 7.23). Wählt man nämlich zum Beispiel $x_0 = 4$, so erhält man die folgenden Werte:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|-------------|--------------|
| 0 | 4 | -2,842 179 4 |
| 1 | 6,120 161 5 | -6,284 645 5 |
| 2 | 238,411 83 | -238,776 |
| 3 | 2038,887 9 | |

Man beachte, daß in diesem Falle wegen $f(4) < 0$, $f''(4) > 0$ die „Vorzeichenregel“ verletzt ist.

* **Aufgabe 7.15:** Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x^2 + \sqrt{x} - \frac{3}{2} = 0$$

im Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ genau eine Lösung ξ hat und berechnen Sie ξ näherungsweise nach dem Newtonschen Verfahren. Die Rechnung ist mit x_n abubrechen, wenn $|f(x_n)| < 10^{-6}$ gilt.

7.7.4. Das allgemeine Iterationsverfahren

Zur Ermittlung der Lösungen von $f(x) = 0$ schreiben wir diese Gleichung nun in der Form

$$x = \varphi(x).$$

Eine solche Umformung ist in vielfältiger Weise möglich.

Beispiel 7.26¹⁾: Die Gleichung

$$x^2 - \ln x - 2 = 0 \tag{7.42}$$

kann man z. B. umformen in

$$x = \frac{2 + \ln x}{x} \quad \text{mit} \quad \varphi_1(x) = \frac{2 + \ln x}{x} \tag{7.43a}$$

$$\text{oder in} \quad x = \sqrt{2 + \ln x} \quad \text{mit} \quad \varphi_2(x) = \sqrt{2 + \ln x} \tag{7.43b}$$

$$\text{oder in} \quad x = e^{x^2-2} \quad \text{mit} \quad \varphi_3(x) = e^{x^2-2}. \tag{7.43c}$$

Jede Lösung ξ der Gleichung $x = \varphi(x)$ heißt *Fixpunkt der Funktion* φ . Geometrisch ist ein Fixpunkt ξ von φ die Abszisse des Schnittpunkts der Bildkurve von φ mit

¹⁾ Dieses Beispiel, das wir auch noch numerisch auswerten werden, ist [15] entnommen (vgl. auch [2] und [3]).

der Geraden $y = x$ (s. Bild 7.25). Zur näherungsweisen Berechnung von ξ geht man folgendermaßen vor: Man ermittelt (z. B. graphisch) einen ersten Näherungswert x_0 für ξ , berechnet den Funktionswert $\varphi(x_0)$ und verwendet diesen als neuen Näherungswert x_1 , man setzt also $x_1 = \varphi(x_0)$.

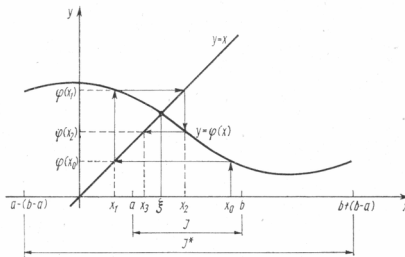


Bild 7.25

Nun verfährt man entsprechend mit x_1 usw. Allgemein erhält man durch die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.44)$$

eine Folge (x_n) . Dieses Verfahren, das man (*allgemeines*) *Iterationsverfahren* nennt, ist in Bild 7.25 veranschaulicht. Für den dort dargestellten Fall vermutet man, daß (x_n) gegen ξ konvergiert. Bild 7.26 zeigt jedoch einen Fall, für den das offenbar nicht zutrifft. Man vermutet einen Zusammenhang zwischen dem Konvergenzverhalten der Folge (x_n) und dem Anstieg der Funktion φ . Für die Funktion φ von Bild 7.25

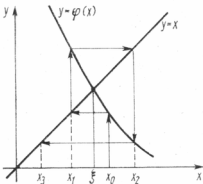


Bild 7.26

ist $|\varphi'(x)|$ „hinreichend klein“ – die Folge (x_n) konvergiert. Bild 7.25 zeigt aber zugleich, daß auch im Falle der Konvergenz nicht alle x_n in einem vorgegebenen Intervall $[a, b]$, das den Fixpunkt ξ und den Startwert x_0 enthält, zu liegen brauchen. Die Konvergenz von (x_n) wird also erst dann gesichert sein, wenn φ in einem geeigneten Intervall $I^* \supset [a, b]$ „hinreichend flach“ verläuft. Eine Auskunft hierüber gibt der folgende

Satz 7.15: Es sei

S. 7.15

$$I = [a, b] \quad \text{und} \quad I^* = (a - (b - a), b + (b - a)).$$

Die Funktion φ habe auf I einen Fixpunkt ξ . Auf I^* sei φ differenzierbar, und es gebe

eine Zahl q mit

$$|\varphi'(x)| \leq q \quad \text{für jedes } x \in I^* \quad (0 \leq q < 1). \quad (7.45)$$

Dann konvergiert für ein beliebiges $x_0 \in I$ die durch (7.44) definierte Folge (x_n) (in I^*) gegen ξ , es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi. \quad (7.46)$$

Beweis: Wir übergehen den Nachweis, daß unter den angegebenen Voraussetzungen jedes x_n in I^* liegt (die Folge (x_n) also überhaupt definiert ist)¹⁾ und wollen nur (7.46) beweisen. Aus (7.44) und $\xi = \varphi(\xi)$ folgt für jedes n

$$x_{n+1} - \xi = \varphi(x_n) - \varphi(\xi). \quad (7.47)$$

Auf die rechte Seite von (7.47) wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Danach existiert eine zwischen x_n und ξ (also in I^*) gelegene Zahl z_n mit

$$\varphi(x_n) - \varphi(\xi) = \varphi'(z_n) \cdot (x_n - \xi). \quad (7.48)$$

Aus (7.47) und (7.48) folgt mit (7.45)

$$|x_{n+1} - \xi| = |\varphi'(z_n)| \cdot |x_n - \xi| \leq q |x_n - \xi|.$$

Schließt man entsprechend für $|x_n - \xi|$ usw., so erhält man

$$|x_{n+1} - \xi| \leq q |x_n - \xi| \leq q^2 |x_{n-1} - \xi| \leq \dots \leq q^{n+1} |x_0 - \xi|. \quad (7.49)$$

Wegen $0 \leq q < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$, also nach (7.49) auch $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \xi| = 0$, woraus schließlich (7.46) folgt. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Wegen (7.49) ist q offenbar ein Maß für die „Konvergenzgeschwindigkeit“ der Folge (x_n) : Die Konvergenz ist um so besser, je kleiner $q \in [0,1)$ ist.

Läßt man wieder den Abbruchtest außer acht, so hat man den folgenden

Algorithmus (allgemeines Iterationsverfahren):

1. Wähle ein Intervall $I = [a, b]$ so, daß $\xi \in I$ und (7.45) gilt. Wähle $x_0 \in I$.
2. Setze $n := 0$.
3. Berechne $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.
4. Setze $n := n + 1$ und gehe zu 3.

Beispiel 7.27: Wir betrachten wieder die Gleichung (7.42), also

$$x^2 - \ln x - 2 = 0$$

(vgl. Beispiel 7.26). Zur Ermittlung der ungefähren Lage ihrer Lösungen schreiben wir sie in der Form

$$x^2 - 2 = \ln x$$

und skizzieren die Bildkurven der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 2$ und $f_2(x) = \ln x$. Nach Bild 7.27 hat die letztgenannte Gleichung und daher auch (7.42) Lösungen ξ_1 und ξ_2 in der Nähe von 0,15 bzw. 1,6. Die Lösung ξ_2 soll mit einem Iterationsverfahren näherungsweise berechnet werden. Wir betrachten zuerst die Darstellung (7.43c). Für die Funktion φ_3 gilt

$$\varphi_3'(1,6) = 3,2 \cdot e^{0,56} \geq 5,6 > 1. \quad (7.50)$$

¹⁾ Siehe [2].

Man wird daher kein ξ_2 enthaltendes Intervall I finden, so daß (7.45) mit einer Zahl $q < 1$ gilt. Die Darstellung (7.43c) ist also zur iterativen Berechnung von ξ_2 nicht geeignet. Die Darstellung (7.43b) untersuchen wir später. Nun wenden wir uns der Darstellung (7.43a) zu. Wählen wir $I = [1,5; 1,7]$, dann ist $\xi_2 \in I$ und

$$I^* = (1,5 - 0,2; 1,7 + 0,2) = (1,3; 1,9).$$

Für jedes $x \in I^*$ gilt

$$\varphi_1'(x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2} < 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1''(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^3} > 0. \quad (7.51)$$

Aus der zweiten Ungleichung von (7.51) folgt, daß φ_1' auf I^* streng monoton wachsend ist. Daraus und aus der ersten Ungleichung von (7.51) ergibt sich

$$|\varphi_1'(x)| < |\varphi_1'(1,3)| < 0,75 \quad \text{für jedes } x \in I^*.$$

Also ist (7.45) mit $q = 0,75$ erfüllt, und die Darstellung (7.43a) kann somit zur iterativen Berechnung von ξ_2 verwendet werden. Die Iterationsvorschrift lautet $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$, also

$$x_{n+1} = \frac{2 + \ln x_n}{x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.52)$$

Mit dem Startwert $x_0 = 1,6 \in I$ erhält man die folgenden Werte:

| n | x_n | n | x_n |
|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 1,6 | 4 | 1,568 774 9 |
| 1 | 1,543 752 3 | 5 | 1,561 916 2 |
| 2 | 1,576 817 8 | 6 | 1,565 969 7 |
| 3 | 1,557 192 5 | 7 | 1,563 571 3 |

Da q recht groß ist, konvergiert die Folge (x_n) langsam. Aus den angegebenen Werten liest man ab: $\xi_2 \approx 1,56$.

Bild 7.28 zeigt die Bildkurve einer Funktion φ mit einem Fixpunkt $\xi \in I = [a, b]$, wobei gilt

$$0 \leq \varphi'(x) \leq q \quad \text{für jedes } x \in I \quad (0 \leq q < 1). \quad (7.53)$$

Man vermutet, daß in diesem Fall für einen beliebigen Startwert $x_0 \in I$ jedes Glied der Folge (x_n) in I gelegen ist, so daß man das Intervall I^* nicht zu betrachten braucht.

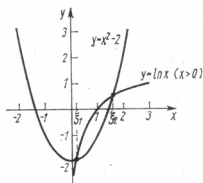


Bild 7.27

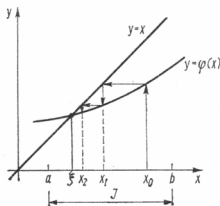


Bild 7.28

Außerdem erwartet man, daß die Folge (x_n) monoton ist. Tatsächlich gilt der folgende Satz, den wir ohne Beweis mitteilen¹⁾:

S. 7.16 Satz 7.16: Die Funktion φ habe auf $I = [a, b]$ einen Fixpunkt ξ . Ferner sei φ auf I differenzierbar, und es gebe eine Zahl q , so daß (7.53) gilt. Dann konvergiert für ein beliebiges $x_0 \in I$ die durch $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) definierte Folge (x_n) (auf I) gegen ξ . Dabei gilt

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq \xi \quad \text{für} \quad x_0 \leq \xi, \quad (7.54a)$$

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq \xi \quad \text{für} \quad x_0 \geq \xi. \quad (7.54b)$$

Beispiel 7.28: Wir wollen untersuchen, ob die Darstellung (7.43 b) zur iterativen Berechnung der bei 1,6 gelegenen Lösung ξ_2 von (7.42) geeignet ist (vgl. Beispiele 7.26 und 7.27) und wählen wieder $I = [1,5; 1,7]$. Die Funktion φ_2 ist auf I definiert, hat dort den Fixpunkt ξ_2 , und es gilt

$$0 \leq \varphi_2'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2 + \ln x}} \leq \frac{1}{2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2 + \ln 1,5}} < 0,22 \quad \text{für jedes } x \in I.$$

Mit $q = 0,22$ ist also (7.53) erfüllt. Für ein beliebiges $x_0 \in I$ – wir wählen $x_0 = 1,6$ – konvergiert daher die durch $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$, also

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + \ln x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.55)$$

definierte Folge (x_n) monoton gegen ξ_2 . Da q klein ist, erwartet man eine schnelle Konvergenz. Diese Erwartung findet man in der folgenden Tabelle bestätigt:

| n | x_n | n | x_n |
|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 1,6 | 4 | 1,564 523 1 |
| 1 | 1,571 624 5 | 5 | 1,564 474 7 |
| 2 | 1,565 921 4 | 6 | 1,564 464 8 |
| 3 | 1,564 760 2 | 7 | 1,564 462 8 |

Hieraus liest man ab: $\xi_2 \approx 1,564 46$.

Bisher haben wir lediglich einige Näherungswerte x_n für die gesuchte Lösung ξ einer gegebenen Gleichung ermittelt, ohne auf Genauigkeitsfragen einzugehen. Der folgende Satz liefert nun *Fehlerabschätzungen*, die direkt auf das Iterationsverfahren (7.44) zugeschnitten sind.

S. 7.17 Satz 7.17: Es gilt unter den Voraussetzungen von Satz 7.15

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad (7.56)$$

und unter den Voraussetzungen von Satz 7.16

$$x_n \leq \xi \leq x_n + \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für} \quad x_0 \leq \xi, \quad (7.57a)$$

$$x_n - \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \xi \leq x_n \quad \text{für} \quad x_0 \geq \xi. \quad (7.57b)$$

¹⁾ Siehe [2].

Beweis: Aus $\xi = \varphi(\xi)$ und $x_n = \varphi(x_{n-1})$ folgt

$$|\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq |\varphi(\xi) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})|.$$

Wendet man auf beide Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so erhält man wegen (7.45)

$$|\xi - x_n| \leq q |\xi - x_n| + q |x_n - x_{n-1}|,$$

woraus unmittelbar (7.56) folgt. Die engeren Schranken von (7.57a) bzw. (7.57b) ergeben sich nun daraus unter Beachtung von (7.54a) bzw. (7.54b). ■

Beispiel 7.29: Wir wollen für die Rechnung von Beispiel 7.28 eine Fehlerabschätzung durchführen. Wegen $x_0 = 1,6 > \xi_2$ ist (7.57b) anzuwenden. Danach gilt mit $q = 0,22$

$$x_7 - \frac{0,22}{0,78} |x_7 - x_6| \leq \xi_2 \leq x_7. \quad (7.58)$$

Bei der weiteren Abschätzung ist folgendes zu beachten: x_6 ist in (7.58) das Folgenglied mit dem kleinsten Index und kann daher als Startwert mit dem exakten Wert 1,564 464 8 angesehen werden. Der Wert $x_7 = \sqrt{2 + \ln x_6}$ ist daraus aber durch Rundungen ermittelt worden. Bei einer Rechnergenauigkeit von ± 1 in der 8. Stelle für die Werte von Logarithmus- und Wurfelfunktion findet man die Einschließung

$$1,564\,462\,7 \leq x_7 \leq 1,564\,462\,9$$

und damit $|x_7 - x_6| \leq 2,1 \cdot 10^{-6}$. Aus (7.58) folgt nun

$$1,564\,462\,1 \leq \xi_2 \leq 1,564\,462\,9,$$

also auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet $\xi_2 = 1,564\,46$.

Abschließend geben wir noch einen Hinweis, der gelegentlich das Auffinden einer geeigneten Iterationsvorschrift erleichtert.

Bemerkung 7.8: Die Funktion φ habe auf dem Intervall I den Fixpunkt ξ . Die Ableitung φ' sei auf I stetig, und es gebe eine Zahl K mit

$$|\varphi'(x)| \geq K \quad \text{für jedes } x \in I \quad (K > 1). \quad (7.59)$$

Dann ist ξ auch Fixpunkt der Umkehrfunktion φ^{-1} von φ , und auf einem gewissen ξ enthaltenden Intervall \tilde{I} gilt

$$|(\varphi^{-1})'(x)| \leq q \quad \text{mit} \quad q = \frac{1}{K} < 1. \quad (7.60)$$

Bei geeigneter Wahl von $x_0 \in \tilde{I}$ ist also die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \varphi^{-1}(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zur näherungsweisen Berechnung von ξ geeignet.

Beispiel 7.30: In Beispiel 7.27 hatten wir gesehen, daß die Funktion φ_3 zur iterativen Berechnung der Lösung ξ_2 von (7.42) nicht geeignet ist [vgl. (7.50)]. Die Umkehrfunktion von

$$\varphi_3: y = e^{x^2-2} \quad (x \geq 0, \quad y \geq e^{-2})$$

ist

$$\varphi_3^{-1}: x = \sqrt{2 + \ln y} \quad (y \geq e^{-2}, \quad x \geq 0)$$

bzw.

$$\varphi_3^{-1}: y = \sqrt{2 + \ln x} \quad (x \geq e^{-2}, \quad y \geq 0),$$

also gerade die Funktion φ_2 , die sich nach Beispiel 7.28 sehr gut für diese Iteration eignet.

Beispiel 7.31: Gesucht ist ein Näherungswert für die kleinste positive Lösung ξ der Gleichung

$$\tan x - x = 0$$

(vgl. Beispiel 7.25). Mittels einer Skizze (s. Bild 7.24) findet man $\xi \in [4,3; 4,7]$. Für die Funktion $\varphi(x) = \tan x$ ($4,3 \leq x \leq 4,7$) gilt aber $\varphi'(x) \geq 1 + \tan^2 4,3 \geq 6$ für jedes $x \in [4,3; 4,7]$, so daß das Iterationsverfahren $x_{n+1} = \tan x_n$ zur numerischen Berechnung von ξ nicht geeignet ist. Gemäß Bemerkung 7.9 gehen wir zur Umkehrfunktion von φ über und finden

$$\varphi^{-1}(x) = \pi + \arctan x \quad (\tan 4,3 \leq x \leq \tan 4,7),$$

$$0 \leq (\varphi^{-1})'(x) \leq \frac{1}{1 + (4,3)^2} < 0,06 \text{ für jedes } x \in [4,3; 4,7]$$

(man beachte $[4,3; 4,7] \subset D(\varphi^{-1})$). Die durch das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = \pi + \arctan x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

erzeugte Folge (x_n) konvergiert also „schnell“ gegen ξ . Mit dem Startwert $x_0 = 4,5$ erhält man die folgenden Werte:

| n | x_n |
|-----|-------------|
| 0 | 4,5 |
| 1 | 4,493 720 1 |
| 2 | 4,493 424 2 |
| 3 | 4,493 410 2 |
| 4 | 4,493 409 5 |
| 5 | 4,493 409 5 |

* **Aufgabe 7.16:** Die in der Nähe von 0,15 gelegene Lösung ξ_1 der Gleichung (7.42) soll iterativ berechnet werden.

a) Entscheiden Sie, welche der Darstellungen (7.43a), (7.43b), (7.43c) für diese Iteration (am besten) geeignet ist.

b) Führen Sie die Iteration mit der unter a) ermittelten Darstellung durch. Die Rechnung ist mit x_{n+1} abzuberechnen, wenn $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$ gilt.

* **Aufgabe 7.17:** Die Funktion f sei so beschaffen, daß durch

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion φ definiert ist.

a) Geben Sie (unter Verwendung der Funktion f) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die Funktion φ einen Fixpunkt ξ hat.

b) Auf welches Verfahren führt in diesem Falle die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)?$$

c) Leiten Sie aus (7.45) eine die Funktion f und ihre Ableitungen betreffende hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Iterationsfolge (x_n) ab.

8. Problemstellung und Historisches

Ebenso wie die Differentialrechnung – vielleicht in noch stärkerem Maße – ist auch die Integralrechnung ein entscheidendes Hilfsmittel für fast alle Disziplinen der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Während die Differentialrechnung ihre Entstehung im wesentlichen dem „Tangentenproblem“ verdankt (vgl. Ausführungen in Abschnitt 1.), ist die Integralrechnung historisch gesehen aus dem Quadraturproblem, d. h. aus der Frage nach dem Flächeninhalt ebener geometrischer Figuren, entstanden. Dabei ist die Bezeichnung „Quadraturproblem“ – an Stelle von „Flächeninhaltsproblem“ – auf die Versuche der Geometer des Altertums zurückzuführen, den Inhalt eines ebenen Flächenstücks durch Verwandlung dieses Flächenstücks in ein inhaltsgleiches Quadrat zu ermitteln.

Beiden Problemen ist gemeinsam, daß sie auf einen Grenzprozeß – auf die Berechnung eines Grenzwertes – führen. Beim Tangentenproblem ist es der „Differentialquotient“, beim Quadraturproblem das sog. „bestimmte Integral“.

Unabhängig von dem anschaulichen Ausgangspunkt werden die auftretenden Grenzwerte als Grundlage für die abstrakte Definition des Differentialquotienten bzw. des bestimmten Integrals genommen, deren Anwendungen jedoch weit über die ursprüngliche geometrische Fragestellung hinausgehen.

Bei der Berechnung des Flächeninhalts A des von den Kurven $x = a$, $x = b$ (Parallelen zur y -Achse), $y = 0$ (x -Achse) und $y = f(x)$ begrenzten Bereichs B (s. Bild 8.1) erhält man zunächst für den Flächeninhalt A die Näherung $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ gesetzt wurde (s. Bild 8.2).

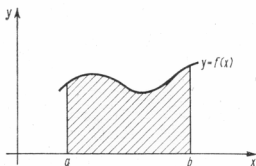


Bild 8.1

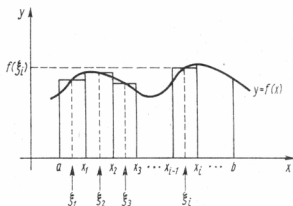


Bild 8.2

Der genaue Wert von A ergibt sich aus der obigen Näherung durch die Bildung eines Grenzwertes $\Delta x_i \rightarrow 0$. Diesen Grenzwert (genaue Beschreibung erfolgt in den Abschnitten 10.1.1. und 10.1.2.) nennt man *das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$* und bezeichnet ihn durch das Symbol $\int_a^b f(x) dx$. Dabei ist das

Zeichen \int eine besondere – von Leibniz eingeführte – Schreibweise des Buchstabens S . Auf Grenzwerte der eben geschilderten Art führen viele Begriffe in Physik, Mechanik und in den Ingenieurwissenschaften. Es seien hier stellvertretend für viele durch

das bestimmte Integral beschreibbaren Sachverhalte die Begriffe „Arbeit“, „Schwerpunkt“ und „Trägheitsmoment“ genannt (s. Abschnitt 10.4.).

Die Anwendungen der Integralrechnung sind so zahlreich, daß es schwerfällt, eine mathematische Disziplin zu nennen, die ohne Integralrechnung auskommt. In allen Natur- und Ingenieurwissenschaften spielen z. B. die Differentialgleichungen (das sind Gleichungen, in denen neben der unabhängigen Veränderlichen x und der abhängigen Veränderlichen y auch wenigstens eine der Ableitungen y' , y'' , ... vorkommt; vgl. auch 4.7.1.) eine große Rolle. Wir wissen an dieser Stelle noch nicht, wie man zu den Lösungen einer Differentialgleichung kommt, aber soviel möchten wir hier schon sagen: Fast immer muß man integrieren – ein Integral lösen –, um eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Dies drückt sich auch in der Namensgebung aus: An Stelle von „Lösung“ einer Differentialgleichung spricht man sehr oft vom „Integral“ einer Differentialgleichung.

Eine Aufgabe der Differentialrechnung besteht darin, zu einer gegebenen Funktion f die Ableitung f' zu bestimmen. In vielen Problemen der Naturwissenschaft und Technik ist jedoch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d. h., es ist eine Funktion zu bestimmen, deren Ableitung bekannt ist. Diese Art der Fragestellung, zu einer Ableitung die Ausgangsfunktion zu bestimmen, führt ebenfalls auf ein Integral, das sog. „unbestimmte Integral“. Unter *dem unbestimmten Integral der Funktion $f(x)$ mit $x \in I$* versteht man also die Menge aller Funktionen $F(x)$, deren Ableitung $F'(x)$ gleich $f(x)$ ist.

Hat man irgendeinen Vertreter $F(x)$ des unbestimmten Integrals von $f(x)$ ermittelt, so führt die anschließende Differentiation von $F(x)$ wieder zu $f(x)$ zurück. Diese Tatsache gibt Anlaß zu der folgenden oft gebrauchten Formulierung: Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation (Unter Integration ist bei dieser Formulierung die Ermittlung des unbestimmten Integrals zu verstehen.)

An einem Beispiel aus der Physik soll der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung nochmals erläutert werden. Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ gilt $v = bt$, wobei b eine konstante Beschleunigung darstellt. Fragt man nach dem Weg, der in einer bestimmten Zeit t zurückgelegt wird, so muß v durch den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ ersetzt werden also folgt

$$\frac{ds}{dt} = bt.$$

Wir suchen somit, wenn wir nach dem zurückgelegten Weg s fragen, die Funktion, deren Ableitung gleich bt ist.

Trotz der unterschiedlichen Definitionen für das bestimmte und das unbestimmte Integral besteht zwischen beiden ein sehr enger Zusammenhang. Ein praktisch brauchbares Rechnen mit dem bestimmten Integral wird erst durch diesen Zusammenhang (s. 10.2.3.) mit dem unbestimmten Integral möglich.

9. Das unbestimmte Integral

9.1. Definition und einige Integrationsregeln

9.1.1. Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

In der Differentialrechnung wird zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ gebildet. Bei vielen Problemen sucht man umgekehrt zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung mit $f(x)$ übereinstimmt. Es ist daher zweckmäßig, für diese neue Funktion $F(x)$ einen besonderen Namen einzuführen.

Definition 9.1: *I sei ein offenes Intervall. Vorgegeben sei eine Funktion $f(x)$, die wenigstens auf dem Intervall I definiert ist. Dann nennt man jede Funktion $F(x)$, deren Ableitung für alle $x \in I$ gleich $f(x)$ ist, d. h.* **D. 9.1**

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

eine **Stammfunktion** von $f(x)$ auf I .

Beispiel 9.1: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$. Das Intervall I kann hierbei beliebig gewählt werden, denn in diesem Fall gilt für jedes x die Gleichung $F'(x) = f(x)$. Bei diesem Beispiel wäre also $I = (-\infty, +\infty)$ das größtmögliche Intervall, für welches $F'(x) = f(x)$ gilt.

Satz 9.1: *Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ auf I , so erhält man durch die Summe $F(x) + c$ (c : beliebige Konstante) sämtliche Stammfunktionen von $f(x)$ auf I .* **S. 9.1**

Unter der fast immer erfüllten Voraussetzung, daß mindestens eine Stammfunktion von $f(x)$ existiert, gibt es also zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ immer unendlich viele Stammfunktionen, da eine Konstante beim Differenzieren null ergibt.

Beweis zu Satz 9.1: Aus $F'(x) = f(x)$ ($x \in I$) folgt $(F(x) + c)' = f(x)$ ($x \in I$). Man muß nun umgekehrt zeigen: Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$, so läßt sich jede andere Stammfunktion $F_1(x)$ von $f(x)$ in der Form $F_1(x) = F(x) + c$ darstellen. Das folgt aber sofort aus 6.2.2. Nach Voraussetzung gilt nämlich $F_1'(x) = f(x)$ und $F'(x) = f(x)$ ($x \in I$). Hieraus folgt $F_1'(x) = F'(x)$ ($x \in I$), also existiert nach Satz 6.5 eine Konstante c , so daß gilt: $F_1(x) = F(x) + c$. ■

Definition 9.2: *Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ auf I , so nennt man die Summe $F(x) + c$, wobei c eine beliebig wählbare Konstante ist, das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ auf I und bezeichnet es mit $\int f(x) dx$.* **D. 9.2**

Nach dieser Definition ist also das unbestimmte Integral von $f(x)$ die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f(x)$. Es gilt

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Die beliebig wählbare Konstante c heißt **Integrationskonstante**. Wegen $F'(x) = f(x)$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

Diese Gleichung dient als *Probe* dafür, daß man das unbestimmte Integral richtig berechnet hat.

9.1.2. Unbestimmte Integrale der Grundfunktionen

In der Differentialrechnung lernten wir die Regeln für die Differentiation der elementaren Funktionen (Grundfunktionen) kennen (s. 4.5.1.). Jede derartige Differentiationsregel liefert wegen des in 9.1.1. beschriebenen Zusammenhangs zwischen Differentiation und Integration sofort eine Integrationsregel. Beispielsweise liefert die Differentiationsregel $(\sin x)' = \cos x$ die Integrationsregel

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

Für $f(x) = \cos x$ ist $F(x) = \sin x$ eine Stammfunktion; für alle x gilt $F'(x) = f(x)$. Das Intervall I kann hier wieder beliebig gewählt werden.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

Die Differentiationsregel $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ für jedes $x \neq 0$ liefert die Integrationsregel $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$. (Voraussetzung über I : $0 \notin I$. Bei der Integrationsregel ist daher der Zusatz $x \neq 0$ anzubringen!)

Hinweis: Statt $\int \frac{1}{x} dx$ ist es üblich, kurz $\int \frac{dx}{x}$ zu schreiben.

Analog kann man zu allen anderen Differentiationsregeln (s. 4.5.1.) entsprechende Integrationsregeln angeben, die ihrer fundamentalen Bedeutung wegen auch *Grundintegrale* genannt werden.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \text{ beliebige reelle Zahl } \neq -1; x > 0) \quad (9.1)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (9.2)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (9.3)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \quad (x \neq 0) \quad (9.4)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (9.5)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad (9.6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \quad (\cos x \neq 0 \text{ für alle } x \in I) \quad (9.7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad (\sin x \neq 0 \text{ für alle } x \in I) \quad (9.8)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2 \quad (-1 < x < 1) \quad (9.9)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c. \quad (9.10)$$

Bemerkung 9.1: Ist in Formel (9.1) α eine ganze Zahl, d. h. $\alpha = n$, so gilt

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Außer $n \neq -1$ braucht man jetzt nur noch die Voraussetzung $x \neq 0$, falls $n < -1$. Im Falle $n > -1$ ist keine Einschränkung erforderlich (s. Bemerkung in 4.5.1.). Bei Formel (9.4) wird manchmal an Stelle von $\ln |x|$ nur $\ln x$ geschrieben. Dann hat man aber für $x \neq 0$ nun $x > 0$ zu schreiben. Mit Absolutzeichen ist jedes Intervall I , welches rechts oder links von $x = 0$ liegt, zulässig; ohne Absolutzeichen sind nur rechts von $x = 0$ liegende Intervalle zulässig. Ähnlich verhält es sich bei den Formeln (9.7), (9.8) und (9.9). In Formel (9.8) zum Beispiel sind nur solche Intervalle I zulässig, bei denen für jedes $x \in I$ gilt $\sin x \neq 0$, ($\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, k ganz).

Zu den Grundintegralen rechnet man oft noch eine Reihe weiterer Integrationsregeln, z. B. die zu der Differentiationsregel für die Funktion $\operatorname{arsinh} x$ gehörige Integrationsregel. Wir begnügen uns aber mit den angegebenen; sie reichen für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen Differentiation und Integration aus. Bei der Integration komplizierterer Funktionen wird man ohnehin eine größere Formelsammlung zu Rate ziehen (s. [1]). Wir möchten aber an dieser Stelle besonders betonen, daß eine gewisse Grundtechnik des Integrierens (hierzu zählt z. B. die Substitutionsmethode und die partielle Integration, auf die wir anschließend (vgl. 9.1.4. und 9.1.5.) eingehen werden) von keiner Formelsammlung ersetzt werden kann! Kompliziertere Integrale versucht man durch geeignete Umformungen, z. B. Substitution oder partielle Integration, auf Grundintegrale bzw. andere schon bekannte Integrale zurückzuführen.

9.1.3. Einige allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale

Analog zu den Differentiationsregeln (4.27) und (4.28) gibt es entsprechende Integrationsregeln:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k \text{ konstant}) \quad (9.11)$$

[in Worten: Ein konstanter Faktor darf vor das Integralzeichen gesetzt werden, vgl. Formel (4.28)].

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (9.12)$$

[in Worten: Eine Summe darf gliedweise integriert werden, vgl. Formel (4.27)].

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf I , so ist die Funktion $\frac{1}{a} F(ax + b)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(ax + b)$ auf jedem Intervall I^* , für welches gilt: $ax + b \in I \forall x \in I^*$. Das heißt:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c. \quad (9.13)$$

Beweis: Wir nehmen an, daß $f(x)$ und $g(x)$ Stammfunktionen haben, die wir mit $F(x)$ bzw. $G(x)$ bezeichnen. Die Formeln (9.11) und (9.12) lauten dann:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot (F(x) + c),$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = (F(x) + c_1) + (G(x) + c_2).$$

Wir haben zu zeigen, daß durch Differentiation der rechten Seiten sich jeweils die links hinter dem Integralzeichen stehende Funktion ergibt (s. Def. 9.2 in 9.1.1.).

$$\text{Zu (9.11): } (k \cdot (F(x) + c))' = (k \cdot F(x) + k \cdot c)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x),$$

$$\text{zu (9.12): } (F(x) + G(x) + c_1 + c_2)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

$$\text{zu (9.13): } \left(\frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c \right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(ax + b) \cdot a = f(ax + b),$$

(s. 4.4.1. und 4.4.2.). ■

$$\text{Beispiel 9.2: } \int x \, dx = \int x^1 \, dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (\text{s. Formel (9.1) in 9.1.2.}).$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel 9.3: } \int (x^2 + 6x - 5) \, dx &= \int x^2 \, dx + 6 \cdot \int x \, dx - 5 \cdot \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + c \quad (\text{s. Formeln (9.11) und (9.12)}). \end{aligned}$$

$$\text{Beispiel 9.4: } \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \int \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c,$$

Vor.: $x \neq 0$. (s. Formel (9.1)).

$$\text{Beispiel 9.5: } \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c,$$

Vor.: $x \geq 0$.

$$\text{Beispiel 9.6: } \int \sqrt{5x + 2} \, dx = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} (5x + 2) \cdot \sqrt{5x + 2} \right) + c,$$

Vor.: $5x + 2 \geq 0$, d. h. $x \geq -\frac{2}{5}$ (s. Formel (9.13)).

$$\text{Beispiel 9.7: } \int \frac{dx}{x + 5} = \ln |x + 5| + c,$$

Vor.: $x + 5 \neq 0$, d. h. $x \neq -5$ (s. Formeln (9.4) und (9.13), wobei $a = 1$,

$b = 5$ ist: $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln |x| \Rightarrow \frac{1}{1} \cdot F(x + 5) = \ln |x + 5|$).

$$* \text{ Aufgabe 9.1: Man berechne a) } \int \left(x^3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3} \right) dx, \quad \text{b) } \int \sqrt{x^3} \, dx.$$

9.1.4. Die Substitutionsmethode bei unbestimmten Integralen

Wenn das unbestimmte Integral $\int f(x) \, dx$ der Funktion $f(x)$ nicht unter den Grundintegralen oder anderen bereits bekannten Integralen zu finden ist, besteht die Aufgabe, das Integral so umzuformen, daß ein Grundintegral oder ein schon bekanntes Integral entsteht.

Eine Methode, das zu erreichen, besteht darin, eine neue Veränderliche u , die mit der alten Variablen x durch die Gleichung $x = \varphi(u)$ bzw. $u = \psi(x)$ verknüpft ist, einzuführen.

Von dem unbestimmten Integral $\int f(x) dx$ kommt man durch eine Substitution $x = \varphi(u)$ formal¹⁾ zu dem Integral $\int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$. Durch diese formale Umformung (die natürlich nicht als Beweis anzusehen ist!) haben wir bereits die der Substitutionsmethode zugrunde liegende Regel gefunden. Es gilt

Satz 9.2 (Regel der Integration durch Substitution): Ersetzt man in $\int f(x) dx$ die Variable x durch eine Funktion $x = \varphi(u)$ einer neuen Variablen u , so gilt

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \Big|_{u=\varphi(x)} \quad (9.14)$$

Hierbei ist $u = \varphi(x)$ die Umkehrfunktion von $x = \varphi(u)$. Auf der rechten Seite von (9.14) bedeutet der Zusatz $u = \varphi(x)$, daß man nach Ermittlung des rechts stehenden Integrals durch die Substitution $u = \varphi(x)$ wieder zur alten Variablen x zurückkehrt. Vorausgesetzt muß hierfür werden, daß $\varphi'(u)$ und die Umkehrfunktion $u = \varphi(x)$ existieren.

Die Umkehrfunktion $u = \varphi(x)$ existiert sicherlich, wenn im betreffenden Intervall $\varphi'(u) \neq 0$ ist, da dann $\varphi(u)$ streng monoton ist.

Beweis der Formel (9.14): Es sei

$$G(u) = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du \quad (I)$$

und

$$F(x) = G(\varphi(x)). \quad (II)$$

Formel (9.14) ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Es ist also zu zeigen, daß für die so eingeführte Funktion $F(x)$ gilt: $F'(x) = f(x)$. Nach (I) gilt:

$$G'(u) = \frac{dG}{du} = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u).$$

Aus (II) folgt dann (Kettenregel und Differentiation der Umkehrfunktion beachten! Vgl. 4.4.2. und 4.4.3.):

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dG}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)) \cdot \varphi'(x) \\ &= (f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)) \cdot \frac{1}{\varphi'(u)} = f(\varphi(u)) = f(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Bei der praktischen Anwendung der Substitutionsmethode kann auf die Überprüfung der für (9.14) notwendigen Voraussetzungen verzichtet werden, wenn man sich durch eine nachträgliche Probe (vgl. Bemerkungen zu Def. 9.2) davon überzeugt, daß die gewonnene Funktion tatsächlich eine Stammfunktion der vorgegebenen Funktion $f(x)$ ist.

Beispiel 9.8: $\int \cos(5x + 1) dx$ ($f(x) = \cos(5x + 1)$).

Die Substitution $u = 5x + 1$ ($\varphi(x) = 5x + 1$), d. h. $x = \frac{u-1}{5}$ ($\varphi(u) = \frac{u-1}{5}$),

¹⁾ Formal bedeutet hier, daß man in dem Symbol $\int f(x) dx$ das Zeichen dx als ein wirkliches Differential der Funktion $x = \varphi(u)$ ansieht und durch $\varphi'(u) du$ ersetzt: $dx = \varphi'(u) du$.

führt hier auf ein Grundintegral. Nach der Formel (9.14) gilt:

$$\begin{aligned}\int \cos(5x + 1) dx &= \int (\cos u) \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{5} \sin u + c = \frac{1}{5} \sin(5x + 1) + c.\end{aligned}$$

Beispiel 9.9: a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$ ($f(x) = \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b}}$) (Vor.: $a \neq 0$).

Substitution: $u = ax^2 + b$ ($\psi(x) = ax^2 + b$)

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2ax.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + b}} &= \int \frac{\frac{du}{2a}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2a} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2a} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{a} \sqrt{u} + c = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + b} + c.\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben hier die Funktion $\varphi(u)$ überhaupt nicht ermittelt. Aus $u = ax^2 + b$ folgt $x = \pm \sqrt{\frac{u-b}{a}}$, und man könnte $\varphi(u) = \sqrt{\frac{u-b}{a}}$ wählen. Die rechte Seite von Formel (9.14) ergibt mit diesem $\varphi(u)$ das Integral

$$\int \frac{\sqrt{\frac{u-b}{a}}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{u-b}{a}}} du = \int \frac{du}{2a\sqrt{u}}.$$

Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie vorhin, als wir im Symbol $\int f(x) dx$ das Zeichen dx wie ein wirkliches Differential behandelt haben. Auch in vielen anderen Beispielen wird man $\varphi(u)$ nicht zu berechnen brauchen.

Beispiel 9.9: b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($|x| < |a|$).

Durch Umformung des Integranden folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Substitution:

$$\frac{x}{a} = \sin u \Rightarrow x = a \cdot \sin u = \varphi(u), \quad dx = a \cdot \cos u du,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a \cos u \, du}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} = \int du = u + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

Hinweis: Da wir bei diesem Beispiel nicht überprüft haben, ob die für (9.14) notwendigen Voraussetzungen gelten, muß die „Probe“ gemacht werden.

Beispiel 9.10: $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$

Substitution: $e^x = u$ ($\psi(x) = e^x$, $\varphi(u) = \ln u$) $\Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}.$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{u - 1}{u + 1} \cdot \frac{du}{u} = \int \left(\frac{2}{u + 1} - \frac{1}{u} \right) du \\ &= \int \frac{2 \, du}{u + 1} - \int \frac{du}{u} = 2 \cdot \ln |u + 1| - \ln |u| + c \\ &= 2 \cdot \ln |e^x + 1| - \ln |e^x| + c \\ &= 2 \cdot \ln (e^x + 1) - \ln (e^x) + c \\ &= 2 \cdot \ln (e^x + 1) - x + c. \end{aligned}$$

Hinweis: e^x ist stets positiv, und es gilt $\ln e^x = x$.

Aufgabe 9.2: Man berechne

a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad (x > 0),$ b) $\int \frac{dx}{9 + 2x^2},$
 c) $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx,$ d) $\int x^2 \sqrt{8x^3 - 1} dx.$

Aufgabe 9.3: Man berechne

a) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$ b) $\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 1} dx,$ c) $\int \tan 3x dx.$

9.1.5. Die partielle Integration

Analog zur Produktregel der Differentialrechnung [vgl. (4.29)]

$$(uv)' = u'v + uv'$$

gilt in der Integralrechnung der folgende Satz:

Satz 9.3: Sind $u = u(x)$ und $v = v(x)$ differenzierbare Funktionen auf I und existiert das Integral $\int u'(x) \cdot v(x) dx$, dann existiert dort auch $\int u(x) v'(x) dx$, und es gilt

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) u'(x) dx \quad (9.15)$$

oder kurz $\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$

Formel 9.15 nennt man *Regel für die partielle Integration*¹⁾. Das links stehende Integral wird also in ein Produkt $u(x) \cdot v(x)$ und ein neues Integral übergeführt. Die Anwendung dieser Regel ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn zu $v'(x)$ eine Stammfunktion $v(x)$ bestimmt werden kann und das in (9.15) rechts stehende Integral leichter lösbar ist als das auf der linken Seite der Gleichung.

Beweis der Formel (9.15): Wir haben zu zeigen, daß sich durch Differentiation der rechten Seite von (9.15) der Integrand des links stehenden Integrals, also $u(x) \cdot v'(x)$, ergibt:

$$\begin{aligned} [u(x) \cdot v(x) - \int v(x) u'(x) dx]' &= u'(x) v(x) + u(x) v'(x) - v(x) \cdot u'(x) \\ &= u(x) v'(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 9.11: $\int x e^x dx$.

Wir wählen $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$, so daß $u'(x) = 1$ und $v(x) = e^x$ folgt. Nach Formel 9.15 gilt dann

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c \\ \int x e^x dx &= (x - 1) e^x + c. \end{aligned}$$

Würden Sie $u(x) = e^x$ und $v'(x) = x$ wählen, dann würde die partielle Integration keine Vereinfachung liefern! Es sei nochmals besonders darauf hingewiesen, daß alle zur Lösung eines Integrals zu ergreifenden Umformungen, Substitutionen und dergleichen dem Ziel dienen, das Integral in eine Form zu bringen, die einem Grundintegral entspricht.

Beispiel 9.12: $\int x^2 \cdot \sin x dx$.

Bei diesem Integral kommt man durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration zum Ziel.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x dx \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \int x \cdot \cos x dx \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot [x \cdot \sin x - \int (\sin x) \cdot 1 dx] \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + c. \end{aligned}$$

Beispiel 9.13: $\int \ln x dx$.

Bei diesem Integral kann scheinbar, da kein Produkt vorliegt, die partielle Integration nicht angewandt werden. Man kann jedoch durch Multiplikation des Integranden mit der Zahl 1, ohne daß sich der Integrand selbst ändert, ein Produkt erhalten, also $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$.

Hier ist es offensichtlich nur sinnvoll, $u(x) = \ln x$ und $v'(x) = 1$ zu setzen, da wir ja andernfalls zu $\ln x$ die Stammfunktion bestimmen müßten und somit wieder bei der ursprünglichen Aufgabenstellung wären. Es folgt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = x$ und damit nach (9.15)

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \ln x dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c \\ &= x(\ln x - 1) + c. \end{aligned}$$

¹⁾ auch „teilweise Integration“ oder „Produktintegration“ genannt.

Beispiel 9.14: $I_n = \int e^x x^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Einmalige Anwendung der partiellen Integration liefert eine Rekursionsformel für I_n :

$$\int e^x x^n dx = e^x \cdot x^n - \int e^x \cdot n x^{n-1} dx = e^x \cdot x^n - n \cdot \int e^x \cdot x^{n-1} dx.$$

Also: $I_n = e^x x^n - n \cdot I_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$

Eine Rekursionsformel für die von einer natürlichen Zahl n abhängigen Größe I_n gestattet die Berechnung von I_n aus I_{n-1} . Rekursionsformeln spielen in der gesamten Mathematik eine wichtige Rolle.

Aufgabe 9.4: Man berechne

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(4x-2)^3}, \quad \text{b) } \int x \cdot e^{3x} dx, \quad \text{c) } \int x^2 \cdot \sin 4x dx.$$

9.1.6. Möglichkeiten und Grenzen der Integration und der Integrationsregeln

In der Differentialrechnung konnten wir feststellen, daß jede elementare Funktion (auch „in geschlossener Form darstellbare Funktion“ genannt) $f(x)$ differenzierbar und ihre Ableitung $f'(x)$ ebenfalls eine elementare Funktion ist (s. 3.4.2. und 4.6.3.). Diese Tatsache ist das theoretische Fundament dafür, daß das Differenzieren i. allg.

keine Schwierigkeiten bereitet. Betrachten wir z. B. die Funktion: $y = \frac{\sin x}{x}$. Man

kann sie sofort differenzieren. Um so überraschender ist es, daß bei dieser Funktion alle Versuche, sie zu integrieren, fehlschlagen. Das obige Beispiel wird in 10.3.3. behandelt. Man hat nachgewiesen, daß sich diese und viele andere Funktionen nicht geschlossen integrieren lassen, d. h., eine Darstellung des Integrals als elementare Funktion „in geschlossener Form“ ist unmöglich. Im allgemeinen existieren zwar diese Integrale, aber sie lassen sich nicht durch eine elementare Funktion darstellen. Es könnte z. B. sein, daß sich das Integral durch eine unendliche Reihe darstellen läßt. Die Integration führt also i. allg. aus der Menge der elementaren Funktionen heraus.

9.2. Integration rationaler Funktionen

9.2.1. Problemstellung und -reduzierung

Vorgegeben sei eine *rationale Funktion*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0).$$

($R(x)$ ist Quotient zweier Polynome $P_n(x)$ und $Q_m(x)$).

$R(x)$ heißt *echt gebrochen*, wenn $n < m$ (d. h. Grad $P_n(x) < \text{Grad } Q_m(x)$) gilt, im anderen Falle (d. h. $n \geq m$) *unecht gebrochen*. Unsere Aufgabe lautet: Berechnung des unbestimmten Integrals jeder rationalen Funktion. Diese Aufgabe läßt sich sofort ein wenig vereinfachen: Da sich jede unecht gebrochene rationale Funktion stets in die Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen

läßt – und Polynome sofort integriert werden können –, genügt es, das unbestimmte Integral von echt gebrochenen rationalen Funktionen zu ermitteln.

Bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, wollen wir noch an einem Beispiel die Zerlegung einer unecht gebrochenen rationalen Funktion in die Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenen rationalen Funktion demonstrieren:

$$R(x) = \frac{6 + 5x + 3x^2 + 2x^3}{2 + x^2}$$

$$(2x^3 + 3x^2 + 5x + 6) : (x^2 + 2) = 2x + 3 + \frac{x}{x^2 + 2}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 \quad \quad + 4x \\ \hline 3x^2 + \quad x + 6 \\ 3x^2 \quad \quad + 6 \\ \hline x \end{array}$$

$$R(x) = \underbrace{2x + 3}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{x}{x^2 + 2}}_{\text{echt gebrochene rationale Funktion}}.$$

9.2.2. Zerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche

Bei der Lösung der in 9.2.1. formulierten Aufgabe berufen wir uns auf den folgenden

S. 9.4 Satz 9.4 (Satz von der Partialbruchzerlegung¹⁾ einer rationalen Funktion):

Jede echt gebrochene rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (n < m)$$

läßt sich in eine Summe von Brüchen (sog. Partialbrüchen) der Form

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta} \quad \text{mit} \quad p^2 - 4q < 0$$

zerlegen. Dabei sind $\alpha, \beta \geq 1$ natürliche Zahlen. a stellt eine reelle Nullstelle und $(x^2 + px + q)$ einen quadratischen Faktor des Nennerpolynoms $Q_m(x)$ dar, der sich im Reellen nicht weiter zerlegen läßt.

Den Beweis dieses Satzes findet man u. a. in [5], Bd. II, oder [10], Bd. II.

Ist $Q_m(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{\beta_l}$ die Zerlegung von $Q_m(x)$ (Nenner von $R(x)$) in reelle Faktoren niedrigsten Grades [die x_i ($i = 1, \dots, k$) sind α_i -fache reelle Nullstellen, die $x^2 + p_jx + q_j$ ($j = 1, \dots, l$) β_j -fache quadratische Faktoren von $Q_m(x)$ mit $p_j^2 - 4q_j < 0$], so läßt sich die echt gebrochene

¹⁾ Anstelle von „Partialbruchzerlegung“ müßte man strenggenommen immer von „Zerlegung in Partialbrüche“ sprechen.

rationale Funktion $R(x)$ in der Form darstellen:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{B_{l\beta_l}x + C_{l\beta_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\beta_l}} \quad (*)$$

Dabei sind die $A_{i\nu}$, $B_{j\mu}$, $C_{j\mu}$ unbekannte, noch zu bestimmende reelle Zahlen.

Merkregel: Zum Faktor $(x - a)^\alpha$ von $Q_m(x)$, $a = x_i$, $\alpha = \alpha_i$, gehört in der Partialbruchzerlegung eine Summe der Form

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha}.$$

Zum Faktor $(x^2 + px + q)^\beta$ von $Q_m(x)$, wobei $p = p_j$, $q = q_j$, $\beta = \beta_j$, $p^2 - 4q < 0$, gehört eine Summe der Form

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_\beta x + C_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta}.$$

Beispiel 9.15: $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$ ($f(x) = P_3(x)$, $g(x) = Q_4(x)$).

Wir wollen die wesentlichsten Schritte, die bei jeder Partialbruchzerlegung getan werden müssen, am vorliegenden Beispiel demonstrieren.

1. Schritt: Aufsuchen der Nullstellen des Nennerpolynoms $g(x)$ und Zerlegung von $g(x)$ in reelle Faktoren niedrigsten Grades.

Dieser Schritt ist meistens der schwierigste bei der Partialbruchzerlegung, denn man muß die Nullstellen einer Gleichung m -ten Grades ermitteln. Für Grad $g(x) \geq 3$ ist dies i. allg. schon recht kompliziert. (Bei unserem Beispiel ist Grad $g(x) = 4$.) Es kann in diesem Zusammenhang nicht unsere Aufgabe sein, auf das gesamte Problem der Nullstellenbestimmung einer Gleichung n -ten Grades einzugehen (vgl. [16] oder [17]).

Wir erinnern hier lediglich an folgende wichtige Tatsache: Ist eine Nullstelle x_1 von $g(x)$ gefunden (z. B. durch Probieren oder durch systematische Einschachtelung), dann wird $g(x)$ durch $x - x_1$ dividiert, und es ergibt sich ein Polynom $q(x)$, dessen Grad um eins niedriger ist. Nun versucht man, bei $q(x)$ eine Nullstelle x_2 zu finden, dividiert $q(x)$ durch $x - x_2$ usw. Bei der Berechnung von $g(x)$ für einen bestimmten Wert x_0 benutzt man gerne das Horner-Schema.

In unserem Beispiel ist $g(1) = 0$, also kann man $g(x)$ durch $x - 1$ dividieren. Man erhält $g(x):(x - 1) = x^3 - x^2 + 4x - 4 = q(x)$. Für $q(x)$ gilt ebenfalls $q(1) = 0$. Division ergibt:

$$q(x):(x - 1) = x^2 + 4. \text{ Hieraus folgt: } g(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 4).$$

Das ist die Zerlegung von $g(x)$ in reelle Faktoren niedrigsten Grades; eine weitere Zerlegung im Reellen ist nicht möglich, weil $x^2 + 4$ keine reellen Nullstellen hat.

2. Schritt: Ansatz für die Partialbruchzerlegung (§. Merkregel S. 151).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{7 - 6x + 12x^2 - 3x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2 + 4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}. \quad (*)$$

Hierbei sind A, B, C, D noch zu bestimmende reelle Zahlen. ($x_1 = 1, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 1$.)

3. Schritt: Bestimmung der im Ansatz für die Partialbruchzerlegung auftretenden Unbekannten.

Eine Methode, die sog. *Koeffizientenvergleichsmethode*, führt immer zum Ziel. Man multipliziert in der Ansatzgleichung (*) beide Seiten mit dem Nennerpolynom $g(x)$ und erhält links und rechts je ein Polynom. Der Vergleich der Faktoren vor $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots$ liefert ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten A, B, C, D (daher der Name „Koeffizientenvergleichsmethode“). In unserem Beispiel folgt aus (*) durch Multiplikation mit $g(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 4)$:

$$7 - 6x + 12x^2 - 3x^3 = A(x-1)(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (C + Dx)(x-1)^2.$$

Ausmultiplikation der rechten Seite und Zusammenfassung nach Potenzen von x ergibt:

$$\begin{aligned} 7 - 6x + 12x^2 - 3x^3 \\ = (-4A + 4B + C) + (4A - 2C + D)x + (-A + B + C - 2D)x^2 \\ + (A + D)x^3. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten ergeben sich folgende 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten A, B, C, D :

$$\begin{aligned} -4A + 4B + C &= 7 \\ 4A - 2C + D &= -6 \\ -A + B + C - 2D &= 12 \\ A + D &= -3. \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten ($m = n = 4$), für das es allgemeine Lösungsverfahren gibt, z. B. den Gaußschen Algorithmus (s. Band 13). In unserem Beispiel können wir auch ohne ein besonderes Verfahren die 4 Unbekannten berechnen. ($D = -3 - A$ wird in die 2. und 3. Gleichung eingesetzt. Wir erhalten drei Gleichungen I', II', III' für A, B, C . I' - III' und $2 \times \text{I}' + \text{II}'$ liefern zwei Gleichungen für A, B .) Wir erhalten: $A = 1, B = 2, C = 3, D = -4$. Damit sind die im Ansatz (*) auftretenden Unbekannten A, B, C, D ermittelt, und die Partialbruchzerlegung ist durchgeführt.

$$\text{Ergebnis: } \frac{7 - 6x + 12x^2 - 3x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2 + 4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3 - 4x}{x^2 + 4}.$$

Bemerkung 9.2: Im allgemeinen ist die Koeffizientenvergleichsmethode nicht diejenige, mit der man am schnellsten die im Ansatz (*) auftretenden Unbekannten berechnen kann. Wir werden beim nächsten Beispiel die *Grenzwertmethode* und die *Einsetzungsmethode* heranziehen. Die inhaltliche Bedeutung dieser Methoden werden wir am Beispiel 9.16 demonstrieren.

9.2.3. Integration der Partialbrüche

Nach dem Satz von der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion und der Formel (9.12) können wir jede (echt gebrochene) rationale Funktion integrieren, wenn man die Partialbrüche integrieren kann. Die folgenden 6 Formeln gestatten es, jeden auftretenden Partialbruch zu integrieren. Mit den beiden ersten Formeln können wir Partialbrüche der Form $\frac{A}{(x-a)^v}$, mit den restlichen vier Formeln Partialbrüche der Form $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu}$ ($p^2-4q < 0$) integrieren.

$$\int \frac{A}{(x-a)^v} dx = -\frac{A}{(v-1) \cdot (x-a)^{v-1}} + c \quad (\text{Vor.: } v > 1, x \neq a) \quad (9.16)$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln |x-a| + c \quad (\text{Vor.: } x \neq a) \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu} dx = & -\frac{B}{2(\mu-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} \\ & + \left(C - \frac{1}{2}Bp\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\mu} \quad (\text{Vor.: } \mu > 1) \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\mu} = & \frac{1}{(\mu-1)(4q-p^2)} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} \\ & + \frac{4\mu-6}{(\mu-1)(4q-p^2)} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} \quad (\text{Vor.: } \mu > 1) \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c \quad (\text{Vor.: } p^2-4q < 0) \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = & \frac{B}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(C - \frac{1}{2}Bp\right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q} \\ (\text{Vor.: } x^2+px+q \neq 0) \end{aligned} \quad (9.21)$$

Bemerkung 9.3: Die Formeln (9.16) und (9.17) lassen sich durch die Substitution $x-a = u$ auf Grundintegrale zurückführen (vgl. Formeln (9.1) und (9.4) in 9.1.2.). Formel (9.17) ist der in Formel (9.16) ausgeschlossene Fall $v=1$.

Die Beweise zu den Formeln (9.18) bis (9.21) können sämtlich dadurch erbracht werden, daß man jeweils die rechte Seite differenziert; diese Ableitung muß dann mit der Funktion übereinstimmen, die auf der linken Seite hinter dem Integralzeichen steht. – Durch Formel (9.18) wird die Integration der Partialbrüche

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu} \quad \text{auf die Integration von} \quad \frac{1}{(x^2+px+q)^\mu}$$

zurückgeführt. Die Integration der letztgenannten Funktionen wird durch die Rekursionsformel (9.19) schrittweise ($\mu, \mu-1, \mu-2, \dots, 1$) auf die Integration von

$\frac{1}{x^2+px+q}$ zurückgeführt; Formel (9.20) liefert den Schluß der gesamten Kette. Formel (9.21) ist der in Formel (9.18) ausgeschlossene Fall $\mu=1$.

Hinweis: Die Partialbrüche müssen nicht unbedingt nach den Formeln (9.16) bis (9.21) berechnet werden. Wenn man bei einem Beispiel durch eine geeignete Umformung, Substitution usw. schneller zum Ziel kommt, wird man selbstverständlich diesen Weg beschreiten. Auf die Formeln (9.16) bis (9.21) sollte man nur dann zurückgreifen, wenn naheliegende und einfache Umformungen nicht zum Ziel führen.

Beispiel 9.16: $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2(x^2 + 4)} dx.$

Der Integrand ist eine echt gebrochene rationale Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\text{Grad } f(x) = 3$ und $\text{Grad } g(x) = 4$.

Der 1. Schritt – Aufsuchen der Nullstellen und Zerlegung von $g(x)$ in reelle Faktoren niedrigsten Grades – ist bei diesem Beispiel überflüssig ($g(x) = x^2(x^2 + 4)$).

2. Schritt: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \quad (*)$$

3. Schritt: Bestimmung der Unbekannten A, B, C, D .

Es ist sehr günstig, die in den Partialbrüchen mit dem jeweils höchsten Exponenten ν bzw. μ (vgl. Satz 9.4) auftretenden Unbekannten nach der sog. *Grenzwertmethode*, die noch verbleibenden Unbekannten durch die sog. *Einsetzungsmethode*, zu ermitteln. Bei unserem Beispiel würden wir also B sowie C und D durch Grenzwertmethode, A durch Einsetzungsmethode ermitteln.

Bestimmung von B : Wir multiplizieren (*) mit x^2 (x^2 = Nenner desjenigen Partialbruches, in dem B vorkommt) und lassen dann $x \rightarrow 0$ streben. (Daher der Name „Grenzwertmethode“! Für $x = 0$ wird der Nenner x^2 gleich 0.)

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4} = Ax + B + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \cdot x^2.$$

Jetzt lassen wir auf beiden Seiten $x \rightarrow 0$ streben und erhalten:

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4} = 2.$$

Bestimmung von C und D : Wir multiplizieren (*) mit $x^2 + 4$ ($x^2 + 4$ = Nenner desjenigen Partialbruches, in dem C und D vorkommen) und lassen dann $x \rightarrow 2i$ streben. (Für $x = 2i$ (oder $x = -2i$) wird $x^2 + 4$ gleich null).

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2} = \frac{A}{x}(x^2 + 4) + \frac{B}{x^2}(x^2 + 4) + (Cx + D).$$

In dieser Gleichung lassen wir jetzt $x \rightarrow 2i$ streben!

$$\frac{(2i)^3 + 5 \cdot (2i)^2 + 4 \cdot (2i) + 8}{(2i)^2} = C \cdot 2i + D \Rightarrow 3 = 2Ci + D$$

$$(i^2 = -1, i^3 = -i) \Rightarrow (\text{Vergleich von Real- und Imaginärteil})$$

$$C = 0, D = 3.$$

Bestimmung von A durch Einsetzungsmethode: Wir setzen in (*) für x den Wert 1 ein oder irgendeinen anderen einfachen Wert, für den natürlich keiner der in (*) auf-

tretenden Nenner gleich null werden darf, und erhalten:

$$\frac{18}{5} = A + B + \frac{C + D}{5}$$

$$\Rightarrow (\text{wegen } B = 2, C = 0, D = 3) A = 1.$$

In unserem Beispiel war nach der Grenzwertmethode nur noch eine Unbekannte – nämlich A – zu ermitteln. Wären 2 oder 3 Unbekannte übriggeblieben, müßten wir für x zwei oder drei Werte einsetzen, um die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten zu erhalten.

Ergebnis der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2 + 4}.$$

Die Integration der hier auftretenden Partialbrüche bereitet keine Schwierigkeiten:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c_1 \quad [\text{s. Formel (9.4)}]$$

$$\int \frac{2}{x^2} dx = 2 \cdot \int x^{-2} dx = -\frac{2}{x} + c_2 \quad [\text{s. Formel (9.1)}]$$

$$\int \frac{3}{x^2 + 4} dx = \frac{3}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \cdot \int \frac{2 du}{u^2 + 1} \quad \left(\text{Substitut.: } u = \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{3}{2} \arctan u + c_3$$

$$= \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + c_3.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 8}{x^2(x^2 + 4)} dx = \ln |x| - \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + c$$

(Vor.: $x \neq 0$).

Aufgabe 9.5: Man berechne folgende Integrale

$$\text{a) } \int \frac{2x^3 + 9x^2 + 8x + 5}{x^2 + 4x + 3} dx, \quad \text{b) } \int \frac{4x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{x^2(x^2 + 9)} dx.$$

$$\text{c) } \int \frac{x^4 + 4x^2 + 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx, \quad \text{d) } \int \frac{x dx}{2x^2 + 5x - 3}.$$

9.3. Integration weiterer Funktionenklassen

Im folgenden wollen wir die wichtigsten Funktionen bzw. Klassen von Funktionen angeben, deren Integrale sich durch elementare Funktionen darstellen lassen (die sich geschlossen integrieren lassen, s. 9.1.6.). Im allgemeinen handelt es sich darum, das

vorgegebene unbestimmte Integral durch eine geeignete Substitution auf die Integration einer rationalen Funktion zurückzuführen. Damit kann dann das Problem als gelöst angesehen werden, denn in 9.2. haben wir nachgewiesen, daß sich jede rationale Funktion geschlossen integrieren läßt [s. Formeln (9.16) bis (9.21)]. – Wir erinnern zunächst noch einmal an den Begriff „rationale Funktion von zwei Veränderlichen“, den wir im folgenden ständig brauchen. Eine Funktion $R(u, v)$ der beiden Veränderlichen u, v heißt rational, wenn sie sich durch einen Ausdruck darstellen läßt, den man durch endlich viele rationale Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) aus u und v unter Hinzunahme von Konstanten erhält.

Beispiele für rationale Funktionen:

$$R_1(x, y) = \frac{x^3 + 4x^2y}{3 - xy}, \quad R_2(x, y) = \pi + \left(\frac{xy^3}{7} - \frac{3}{x^3} \right)^2.$$

Beispiele für nichtrationale Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{x^2 - 3xy^2}, & f_3(x, y) &= \frac{\ln |x|}{y}. \\ f_2(x, y) &= \frac{\sin x}{\cos y}, & f_4(x, y) &= y \cdot 2^x. \end{aligned}$$

9.3.1. Das Integral $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$

S. 9.5 Satz 9.5: Alle Funktionen der Form $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ – das sind Funktionen von x , die sich durch endlich viele rationale Operationen aus x und $\sqrt[n]{ax+b}$ sowie Konstanten aufbauen lassen – kann man geschlossen integrieren.

Beweis: Wir zeigen, daß durch die Substitution

$$t = \sqrt[n]{ax+b}$$

das vorgegebene Integral auf das Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt werden kann. – Aus $t = \sqrt[n]{ax+b}$ folgt $ax+b = t^n$.

$$\Rightarrow x = \frac{t^n - b}{a} \quad (\text{Vor.: } a \neq 0) \quad \Rightarrow dx = \frac{nt^{n-1}}{a} dt. \text{ Also gilt:}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \cdot \frac{n}{a} t^{n-1} dt.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist eine rationale Funktion in t . Begründung: Durch Anwendung rationaler Operationen auf die beiden Größen $\frac{t^n - b}{a}$ und t gewinnt man eine rationale Funktion in t , d. h., $R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right)$ ist eine rationale Funktion in t . Multiplikation mit $\frac{n}{a} t^{n-1}$ ergibt dann ebenfalls eine rationale Funktion in t .

Beispiel 9.17: $\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} dx = \int R(x, \sqrt{x-1}) dx \quad (n=2, a=1, b=-1).$

Substitution: $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt.$

$$\begin{aligned}\text{Also gilt: } \int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{(t^2 + 1) + t}{(t^2 + 1) - t} \cdot 2t dt \\ &= 2 \cdot \int \frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - t + 1} dt =: 2 \cdot \int R^*(t) dt.\end{aligned}$$

Der Integrand $R^*(t)$ ist eine (unecht gebrochene) rationale Funktion. Division ergibt:

$$R^*(t) = t + 2 + \frac{2t - 2}{t^2 - t + 1} =: P(t) + R_1(t).$$

Das Polynom $P(t)$ kann sofort integriert werden. Auf die echt gebrochene rationale Funktion $R_1(t)$ wendet man die Formeln (9.21) und (9.20) an. Nach Durchführung der Integration muß man natürlich von der Veränderlichen t wieder zur alten Veränderlichen x zurückgehen ($t = \sqrt{x-1}$). Man erhält als Schlussergebnis:

$$\begin{aligned}\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} dx &= x + 4\sqrt{x-1} + 2 \ln(x - \sqrt{x-1}) \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{3}} + c.\end{aligned}$$

$$\text{Aufgabe 9.6: Man berechne a) } \int \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}, \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{3x+2}}. \quad *$$

9.3.2. Das Integral $\int R(e^x) dx$

Dieses Integral kann durch die Substitution $t = e^x$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt werden. Aus $t = e^x$ folgt $dt = e^x dx$, also gilt:

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt. \text{ Der Integrand } R^*(t) = \frac{R(t)}{t} \text{ ist eine rationale Funktion in } t \text{ (siehe Definition von } R(x) \text{ in 9.2.1.)}$$

$$\begin{aligned}\text{Beispiel 9.18: } \int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx &= \int \frac{t^2}{t-1} \frac{dt}{t} \quad (\text{Subst.: } t = e^x) \\ &= \int \frac{t}{t-1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= t + \ln|t-1| + c = e^x + \ln|e^x - 1| + c.\end{aligned}$$

Bemerkung 9.4: $\frac{t}{t-1}$ ist eine unecht gebrochene rationale Funktion in t , bei der man zunächst die Zerlegung in ein Polynom und eine echt gebrochene rationale Funktion durchführt (Division!).

$$\text{Aufgabe 9.7: Man berechne a) } \int \frac{dx}{e^{2x} - 1}, \quad \text{b) } \int \frac{e^x dx}{1 + 3e^x}, \quad \text{c) } \int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx. \quad *$$

9.3.3. Das Integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Auf Grund der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus gelten folgende Beziehungen:

$$\sin x = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}. \quad (9.22)$$

$$\text{Analog: } \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}. \quad (9.23)$$

Diese Umformungen legen es nahe, die Substitution

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad (9.24)$$

vorzunehmen. Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

Bei der Herleitung der letzten Gleichung beachte man, daß aus $t = \tan \frac{x}{2}$ die Beziehung $\frac{x}{2} = \arctan t$ folgt (Vor.: $-\pi < x < \pi$). Also gilt: [s. Formeln (9.22) und (9.23)]

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =: \int R^*(t) dt. \quad (9.25)$$

Der Integrand $R^*(t)$ ist wieder eine rationale Funktion in t , wie man sich durch einfache Überlegungen – analog denen in 9.3.1. – sofort klarmachen kann.

Bemerkung 9.5: Bevor man $t = \tan \frac{x}{2}$ substituiert, ist es oft zweckmäßig, es zunächst einmal mit einer einfacheren Substitution – z. B. $t = \cos x$ – zu versuchen.

Bemerkung 9.6: Es kann vorkommen, daß der Integrand $R(\sin x, \cos x)$ für alle x , dagegen der neue Integrand $R^*(t)$ nicht für alle t -Werte definiert ist – eine Tatsache, die durch die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ bedingt ist ($\tan \frac{x}{2}$ ist für alle $x = \pi + k \cdot 2\pi$ nicht definiert!). Es empfiehlt sich, am Schlußergebnis zu prüfen, für welche Intervalle I die ermittelte Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion der vorgegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

$$\begin{aligned}
 \text{Beispiel 9.19: } \int \frac{dx}{\sin x} &= \int R(\sin x, \cos x) dx \quad (\cos x \text{ kommt hier explizit nicht vor}) \\
 &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \quad [\text{s. Formel (9.25)}] \\
 &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.
 \end{aligned}$$

Voraussetzung: $\tan \frac{x}{2} \neq 0$ für alle $x \in I$, d. h. $x \neq k\pi$ für alle $x \in I$.

$$\text{Aufgabe 9.8: Man berechne a) } \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \text{b) } \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx. \quad *$$

9.3.4. Das Integral $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

In 9.3.1. hatten wir festgestellt, daß sich alle Funktionen der Form $R(x, \sqrt{ax + b})$ geschlossen integrieren lassen (Substitution: $t = \sqrt{ax + b}$). Diese Aussage kann man auch für alle Funktionen der Form $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ treffen. Im Falle $a > 0$, $D = b^2 - 4ac \neq 0$ läßt sich das vorgegebene Integral durch die Substitution $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen. Aus der Substitutionsgleichung folgt $ax^2 + bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}tx + ax^2$, d. h.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \\
 dx &= \frac{-2t^2\sqrt{a} + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt =: R_1(t) dt.
 \end{aligned}$$

So erhält man schließlich:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, t + \frac{(t^2 - c)\sqrt{a}}{b - 2t\sqrt{a}}\right) \cdot R_1(t) dt.$$

Der Integrand $R^* := R \cdot R_1$ ist eine rationale Funktion in t .

Beispiel 9.20: Beim Integral $\int \frac{x - \sqrt{x^2 - 5x + 1}}{x^2} dx$ führt die Substitution $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = t + x$ auf das Integral $\int \frac{2t^3 + 10t^2 + 2t}{(1 - t^2)^2} dt$ (nachprüfen!). Der neue Integrand ist eine echt gebrochene rationale Funktion in t .

9.3.5. Elliptische Integrale

Funktionen der Form $R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + e})$ und $R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f})$ lassen sich im allgemeinen nicht geschlossen integrieren. Integrale von diesen Funk-

tionen nennt man *elliptische Integrale*. Der Name „elliptisches Integral“ rührt daher, daß man bei der Berechnung der Bogenlänge (des Umfangs) einer Ellipse auf ein derartiges Integral stößt (s. [1] und [5], Bd. II).

* *Aufgabe 9.9:* Man berechne $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}}.$

Bemerkung 9.7: Durch geeignete Umformungen können elliptische Integrale auf elliptische Integrale in der sog. Legendreschen Normalform zurückgeführt werden:

$$\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = F(k, \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = E(k, \varphi)$$

bzw.

$$\int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1 + h \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \pi(h, k, \varphi);$$

sie heißen *elliptische Integrale 1. bzw. 2. bzw. 3. Gattung* und sind in Tafeln zu finden. (Vgl. z. B. [1])

Beispiel 9.21: Für die Bogenlänge einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gilt:

$$s = 2 \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \text{mit} \quad y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (\text{Vgl. Satz 10.18})$$

Hieraus folgt: $s = 2 \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx, \quad (a^2 - b^2 = k^2 a^2).$

Durch Erweiterung des Integranden mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ erkennt man, daß es sich um ein elliptisches Integral des Typs $\int R(x, ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f) dx$ handelt. Durch die Substitution $x = a \cdot \sin t$ ($dx = a \sqrt{1 - \sin^2 t} dt$) erhält man:

$$s = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 2a \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Es gilt also:

$$s = 4aE\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für $a = 5, b = 2,5$ ist $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $s = 20 \cdot 1,2111 = 24,222.$

10. Das bestimmte Integral

10.1. Definition, Existenz und Eigenschaften

10.1.1. Integralsummen

Auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ sei eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wählt man eine endliche Anzahl von Werten x_1, x_2, \dots auf dem Intervall I mit $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, so erhält man eine *Zerlegung* Z von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n];$$

der einheitlichen Bezeichnung wegen wurde $a = x_0$ und $b = x_n$ gesetzt (s. Bild 10.1).

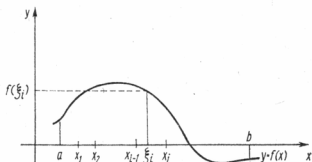


Bild 10.1

Ist Z die eben beschriebene Zerlegung von $[a, b]$, so nennt man $\delta := \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$ ($\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$) das *Feinheitmaß* der Zerlegung Z . δ ist die Länge des größten Teilintervalls von Z . Je kleiner δ ist, um so „feiner“ ist die Zerlegung Z . In jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ wählen wir einen Punkt ξ_i mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ und bilden folgende Summe:

$$S(Z) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (10.1)$$

$S(Z)$ heißt die zu der Zerlegung Z gehörige *Integralsumme* (auch Zerlegungs- oder Zwischensumme). Die Integralsumme ist abhängig von der Zerlegung Z und von der Wahl der Zwischenpunkte ξ_i ; genaugenommen müßte man also schreiben

$$S(Z; \xi_1, \dots, \xi_n).$$

10.1.2. Das bestimmte Integral

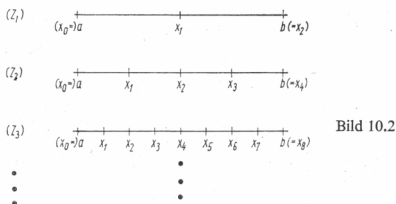
Das bestimmte Integral erhält man aus der Integralsumme, indem man die Zerlegung Z immer feiner werden läßt! Diese etwas oberflächliche Formulierung wollen wir jetzt präzisieren.

Definition 10.1: Eine Folge von Zerlegungen Z_1, Z_2, \dots des Intervalls $[a, b]$ heißt eine **D. 10.1**
Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen von $[a, b]$, wenn die entsprechenden Feinheitmaße $\delta_1, \delta_2, \dots$ gegen null konvergieren, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Bemerkung: An Stelle von „Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen“ sagt man oft „*ausgezeichnete Einteilungsfolge*“.

Bild 10.2 zeigt ein Beispiel für eine Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen von $[a, b]$.



Wenn für jede Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen Z_1, Z_2, \dots von $[a, b]$ die zugehörige Folge der Integralsummen $S(Z_1), S(Z_2), \dots$ gegen einen bestimmten Wert G konvergiert – und zwar unabhängig von der Wahl der Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen und unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte –, so wollen wir diesen Grenzwert G mit dem alles Wesentliche erfassenden Symbol

$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ bezeichnen [vgl. Formel (10.1)].

D. 10.2 Definition 10.2: Falls der Grenzwert $G = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ existiert, nennt man ihn das **bestimmte (Riemannsche) Integral** der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ und bezeichnet ihn mit dem Symbol $\int_a^b f(x) dx$. Es gilt also:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (10.2)$$

Bemerkung: Der hier eingeführte Integralbegriff geht im wesentlichen auf Bernhard Riemann (1826–1866) zurück. – Der Wert des bestimmten Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ hängt selbstverständlich nicht davon ab, mit welchem Buchstaben man die unabhängige Veränderliche bezeichnet. Man kann daher ebenso gut an

Stelle von $\int_a^b f(x) dx$ auch $\int_a^b f(t) dt$ oder $\int_a^b f(u) du$ oder ähnlich schreiben. Das bestimmte

Integral ist der Grenzwert einer Folge von Summen der Form $Sf(\xi_i) \Delta x_i$, wobei wir ausnahmsweise an Stelle von \sum hier einmal S geschrieben haben. Mit dieser Schreibweise wird auch verständlich, warum für das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ das Symbol $\int_a^b f(x) dx$ gewählt wurde.

Bei unserem Aufbau sind wir von einem Intervall $[a, b]$ ausgegangen; in den Ausführungen 10.1.1. und 10.1.2. gilt also immer die Voraussetzung $a < b$. Von dieser Einschränkung wollen wir uns durch die folgende ergänzende Definition befreien.

Definition 10.3:

$$\int_a^a f(x) dx := 0.$$

Für $a > b$ gilt: $\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx.$

Im folgenden lernen wir eine 1. Anwendung des bestimmten Integrals kennen:

Beispiel 10.1: Es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, d. h., die Kurve $y = f(x)$ verläuft für alle $x \in [a, b]$ oberhalb der x -Achse. Wir suchen den *Flächeninhalt A des durch die vier Kurven $y = 0, x = a, x = b, y = f(x)$ begrenzten Flächenstücks* (s. Bild 10.3). Man zerlegt $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) und wählt Zwischenpunkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. $\Delta x_i \cdot f(\xi_i)$ ist eine Näherung für den Flächeninhalt des zwischen $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$ liegenden Streifens.

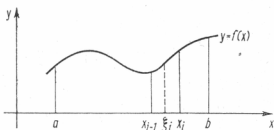


Bild 10.3

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ist dann eine Näherung für den gesuchten Flächeninhalt A : $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$

Diese Näherung ist um so besser, je feiner die Zerlegung ist; den genauen Wert von A erhält man durch einen Grenzprozeß:

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Also gilt [s. Formel (10.2)]: $A = \int_a^b f(x) dx.$

Hinweis: Im Falle $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$A = - \int_a^b f(x) dx.$$

10.1.3. Integrierbare Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heißt *auf $[a, b]$ integrierbar*, wenn das bestimmte Integral von (x) über $[a, b]$ existiert, d. h., wenn der Grenzwert einer Folge von Integralsummen in dem in Definition 10.2 angegebenen Sinne existiert. Es würde hier zu weit führen, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit einer Funktion anzugeben, z. B. das sogenannte Riemannsche Integrabilitätskriterium (vgl. [10], Bd. III).

Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir wissen, welche der in den Anwendungen vorkommenden Funktionen integrierbar sind. Der folgende Satz 10.1 gibt eine für die meisten Anwendungen völlig ausreichende Antwort.

Satz 10.1: Jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ ist auf diesem Intervall integrierbar. **S. 10.1**

Den (nicht ganz einfachen) Beweis zu diesem Satz findet man z. B. in [5], Bd. II, oder [10], Bd. III.

Da in den Anwendungen neben den stetigen Funktionen auch sog. stückweise stetige Funktionen (s. Bild 10.4) vorkommen, möchte man wissen, ob bei dieser Klasse von Funktionen die Integrierbarkeit auch gewährleistet ist.

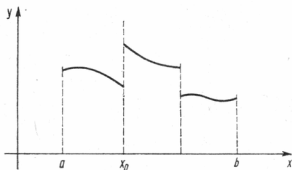


Bild 10.4

S. 10. Satz 10.2: Jede auf dem Intervall $[a, b]$ stückweise stetige Funktion $f(x)$ ist auf diesem Intervall integrierbar. (Beweis: s. wiederum [5], Bd. II, oder [10], Bd. III.)

Wir notieren noch die folgende Aussage:

Jede auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte und monotone Funktion ist auf diesem Intervall integrierbar.

10.1.4. Eigenschaften des bestimmten Integrals

S. 10.3 Satz 10.3: Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stückweise stetig und c ein Punkt aus dem Innern des Intervalls, d. h. $a < c < b$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Der Beweis ist sehr einfach zu erbringen. Man nehme eine solche Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen Z_1, Z_2, \dots von $[a, b]$, bei der der Punkt c Teilungspunkt für jede Zerlegung Z_i ($i = 1, 2, \dots$) ist. Alles andere ergibt sich mit ein wenig Schreibarbeit aus Definition 10.2. Wir verzichten auf die detaillierte Durchführung, zumal der Satz für den Fall $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ als eine geometrische Selbstverständlichkeit erscheint (s. Bild 10.5):

$$A = \int_a^b f(x) dx = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

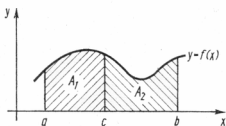


Bild 10.5

Bemerkung: Satz 10.3 bleibt auch richtig, wenn die Voraussetzung $a < c < b$ nicht erfüllt ist. Gilt z. B. $a < b < c$ (alle anderen noch denkbaren Fälle erledigt man ana-

log!), so folgt aus Satz 10.3 zunächst:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(s. Def. 10.3).

Satz 10.4: Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei auf $[a, b]$ integrierbare Funktionen, c_1 und c_2 Konstanten, so ist auch $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, und es gilt: S. 10.4

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx.^1)$$

Beweis: (vgl. Def. 10.2)

$$\begin{aligned} \int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum (c_1 f_1(\xi_i) + c_2 f_2(\xi_i)) \Delta x_i \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (c_1 \sum f_1(\xi_i) \Delta x_i + c_2 \sum f_2(\xi_i) \Delta x_i) \\ &= c_1 \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f_1(\xi_i) \Delta x_i + c_2 \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f_2(\xi_i) \Delta x_i \\ &= c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Satz 10.5 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung): Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft S. 10.5

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(\xi).$$

(Bemerkung: $\xi \in [a, b] \Leftrightarrow \xi = a + \vartheta(b - a)$, $0 \leq \vartheta \leq 1$).

Den Inhalt dieses Satzes wollen wir uns für den Fall „ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ “ an Hand des Bildes 10.6 veranschaulichen. Der Flächeninhalt

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

des schraffierten Gebietes ist gleich dem Flächeninhalt $A_1 = (b - a) \cdot f(\xi)$ eines über dem Intervall $[a, b]$ errichteten Rechtecks (ξ muß geeignet gewählt werden!). (Den Beweis dieses und auch der folgenden beiden Sätze findet man z. B. in [5], Bd. II, oder [10], Bd. III.)

¹⁾ Die Menge der auf einem festen Intervall $[a, b]$ integrierbaren Funktionen bildet einen linearen Raum (vgl. Band 1).

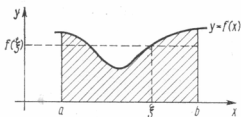


Bild 10.6

S. 10.6 Satz 10.6: $f(x)$ und $g(x)$ seien auf $[a, b]$ stückweise stetig. Dann gilt: Aus $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ folgt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Den einfachen Beweis übergehen wir, zumal die obige Aussage im Falle $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ wieder eine geometrische Selbstverständlichkeit darstellt.

Aus Satz 10.6 ergibt sich auch leicht der folgende

10.7 Satz 10.7:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(Vor.: $f(x)$ auf $[a, b]$ stückweise stetig).

10.2. Berechnung bestimmter Integrale

10.2.1. Problematik

Wollte man jedes bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ nach der in 10.1.2., Definition 10.2, angegebenen Vorschrift berechnen, so wäre das ein sehr kompliziertes Unternehmen und für die Anwendung daher nahezu unbrauchbar. Für jedes Z_ν einer Folge Z_1, Z_2, \dots von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen von $[a, b]$ hat man die Integralsumme $S(Z_\nu) = \sum f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ zu berechnen und den Grenzwert der Folge $S(Z_1), S(Z_2), \dots$ zu bestimmen. Besonders die Bestimmung des Grenzwertes der Folge der Integralsummen ist schon bei einfachen Funktionen $f(x)$ außerordentlich kompliziert. Als Beispiel nennen wir die sicherlich nicht als besonders schwierig anzusehende Funktion $y = f(x) = x^2$ (Normalparabel). Wer würde vermuten, daß die Berechnung von $\int_a^b x^2 dx$ nach Definition 10.2 schon auf einige Schwierigkeiten stößt? (Selbst $\int_a^b x dx$ ist nicht trivial!)

Um z. B. das Integral $\int_0^b x^2 dx$ zu berechnen, könnte man das Intervall $[0, b]$ in n gleiche Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) der Länge $\Delta x = \frac{b}{n}$ zerlegen und als Zwischenpunkte ξ_i den jeweils rechten Eckpunkt x_i des entsprechenden Teilintervalls wählen. Für die zu dieser Zerlegung gehörige Integralsumme S gilt dann:

$$\begin{aligned} S &= \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \sum f(x_i) \Delta x = \sum x_i^2 \Delta x = \sum (i \Delta x)^2 \Delta x \\ &= (\Delta x)^3 \sum i^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

Von dieser Integralsumme müßte jetzt der Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$, d. h. $n \rightarrow \infty$ bestimmt werden ($\Delta x = \frac{b}{n}$). Wir wollen diesen Weg hier nicht weiter verfolgen. Es sollte lediglich demonstriert werden, daß die Berechnung bestimmter Integrale nach Definition 10.2 im allgemeinen recht schwierig ist. (Beispiele dieser Art findet man z. B. in [11], Teil II.)

Das bestimmte Integral wird im allgemeinen nicht nach dem in Definition 10.2 angegebenen Weg berechnet. Ist nämlich von der Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt, so kann man durch eine einfache Differenzbildung sofort das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ berechnen. Dies ist die wesentliche Aussage des sog. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, den wir in 10.2.3. behandeln. Der wesentliche Grundstein für diesen „Hauptsatz“ ist die in dem folgenden Abschnitt 10.2.2. enthaltene Aussage.

10.2.2. Bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze

Das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ über $[a, b]$ wird durch das Symbol $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet. Denkt man sich im Intervall $[a, b]$ für b die variable Grenze x eingesetzt und fragt nach dem bestimmten Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, x]$, so kann man dafür schreiben:

$$\int_a^x f(x) dx.$$

Ein solches Integral nennt man ein *bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze*. Das x der oberen Grenze hat dabei natürlich nichts mit dem x in $f(x)$ zu tun. Um ganz sicher zu gehen, wird meistens an Stelle von $\int_a^x f(x) dx$ die Schreibweise $\int_a^x f(t) dt$ benutzt.

Ist $y = f(x)$ auf dem Intervall $I = [A, B]$ stetig, $a \in [A, B]$ ein fester Wert, $x \in [A, B]$ ein variabler Wert, so existiert nach 10.1.3., Satz 10.1, das Integral $\int_a^x f(t) dt$ (s. Bild 10.7). $\int_a^x f(t) dt$ ist für jedes $x \in [A, B]$ definiert und durch die Vorgabe der oberen Grenze x eindeutig bestimmt; d. h.: $\int_a^x f(t) dt$ ist eine Funktion seiner oberen Grenze x . Wir wollen diese Funktion mit $F_1(x)$ bezeichnen:

$$F_1(x) := \int_a^x f(t) dt. \quad (10.3)$$

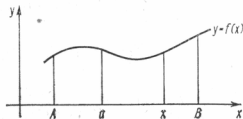


Bild 10.7

S. 10.8 Satz 10.8: Ist $f(t)$ auf einem Intervall I stetig, a ein fester Wert aus I , so ist die auf I definierte Funktion

$$F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$F_1'(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

d. h.,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \forall x \in I. \quad (10.4)$$

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß für jedes $x_0 \in I$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

(Man beachte, daß der links stehende Grenzwert – falls er existiert – gleich $F_1'(x_0)$ ist! Ist x_0 ein Randpunkt von I , so ist der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert zu nehmen!)

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

(s. Satz 10.3 in 10.1.4. und Definition 10.3 in 10.1.2.). Es gilt also zunächst einmal:

$$F_1(x) - F_1(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Da $f(x)$ nach Voraussetzung auf dem Intervall $x_0 \dots x$ stetig ist, existiert nach Satz 10.5 aus 10.1.4. ein ξ zwischen x_0 und x , so daß gilt:

$$F_1(x) - F_1(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = (x - x_0) \cdot f(\xi)$$

$$(\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0), 0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Hieraus folgt (für jedes $x \neq x_0$):

$$\frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(\xi). \quad (*)$$

Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} (x_0 + \vartheta(x - x_0))\right] = f(x_0).$$

Aus (*) folgt dann: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$ ■

Ergänzung zu Satz 10.8: Ist $f(t)$ auf I stückweise stetig, a ein fester Wert aus I , so ist $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$ auf I stetig. Das ist die sog. *Glättungseigenschaft* des bestimmten Integrals mit variabler oberer Grenze (s. Aufgabe 10.4).

Satz 10.9: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion besitzt auf I eine Stammfunktion. S. 10.9

Dieser Satz bestätigt die Aussage der Fußnote S. 60. Die Aussage von Satz 10.9 ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 10.8:

$$F_1(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ist eine Stammfunktion von } f(x) \text{ auf } I.$$

10.2.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 10.10: Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ auf $[a, b]$, so gilt¹⁾:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Will man das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ nach diesem Satz berechnen, so muß also zunächst das unbestimmte Integral $\int f(x) dx = F(x) + c$ bestimmt werden. Die Differenz $F(b) - F(a)$ liefert dann den Wert des bestimmten Integrals.

Beweis zu Satz 10.10: $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist nach Satz 10.8 eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $[a, b]$. Für $F(x)$ gilt daher: $F(x) = F_1(x) + c$ (s. 9.1.1., Satz 9.1). Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F_1(b) - F_1(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung: An Stelle von $F(b) - F(a)$ schreibt man oft abkürzend $F(x)|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$.

$$\text{Beispiel 10.2: } \int_1^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

$$\text{Beispiel 10.3: } \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Frage: Die beiden Integrale liefern geometrisch den Flächeninhalt von ebenen Bereichen. Um welche Bereiche handelt es sich? (s. 10.1.2., Beispiel 10.1.)

¹⁾ Diese Formel wird zu Ehren der Begründer der Differential- und Integralrechnung, *Isaac Newton* und *Gottfried Wilhelm Leibniz*, auch „Formel von Newton-Leibniz“ genannt.

würde man bei der Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe einer Substitution wie folgt vorgehen:

1. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$.
2. Rücktransformation von der neuen Veränderlichen u zur alten Veränderlichen x liefert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
3. Berechnung der Differenz $F(b) - F(a)$.

$$\text{Beispiel 10.4: } I = \int_{-3}^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \\ du &= 2x \, dx \end{aligned}$$

kann man das zugehörige unbestimmte Integral berechnen:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{u} + c.$$

Rücktransformation $u = x^2 + 1$ liefert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, nämlich: $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Hieraus folgt:

$$I = F(x) \Big|_{-3}^8 = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_{-3}^8 = \sqrt{65} - \sqrt{10} = 8,06 - 3,16 = 4,9.$$

Das Wesentliche bei diesem Vorgehen ist die völlig getrennte Berechnung des zugehörigen unbestimmten Integrals!

Bei einer zweiten Methode werden bei der Transformation von der alten Veränderlichen x zur neuen Veränderlichen u auch die Integrationsgrenzen mittransformiert. Es gilt

Satz 10.11: Wenn für das unbestimmte Integral von $f(x)$ die Formel

S. 10.11

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du \Big|_{u=\varphi(x)} \quad (10.5)$$

gilt (vgl. Satz 9.2 in 9.1.4.), so gilt für das bestimmte Integral folgende Formel:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du. \quad (10.6)$$

Selbstverständlich müssen wieder die in 9.1.4. bei Satz 9.2 formulierten Voraussetzungen erfüllt sein! Insbesondere muß die Funktion $x = \varphi(u)$ (und damit auch $u = \varphi(x)$) auf dem entsprechenden Intervall umkehrbar eindeutig sein. Das Nichtbeachten dieser Voraussetzung kann zu schweren Fehlern führen.

Beweis: $G(u)$ sei eine Stammfunktion von $f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$, $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. (10.5) ist dann äquivalent mit $F(x) = G(\varphi(x)) + c$. Hieraus folgt $F(b) - F(a) = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$. Diese Gleichung ist aber mit (10.6) äquivalent. ■

Beispiel 10.5: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$ geht durch die Substitution

$$u = \sin x = \varphi(x)$$

$$(du = \cos x \, dx; x_1 = 0, u_1 = \sin x_1 = 0; x_2 = \frac{\pi}{2}, u_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; u = \sin x \text{ ist auf } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ umkehrbar eindeutig})$$

über in

$$\int_0^1 u^2 \, du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 10.6: $I = \int_2^4 \sqrt{1 - (x - 3)^2} \, dx$ geht durch die Substitution $u = x - 3$ zunächst in das Integral

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} \, du$$

über. $u = x - 3$ ist auf $[2, 4]$ umkehrbar eindeutig; den x -Werten $x_1 = 2, x_2 = 4$ entsprechen die u -Werte $u_1 = -1, u_2 = 1$. Durch die Substitution $u = \sin t$ ($u = \sin t$

liefert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von dem Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ auf das Intervall $-1 \leq u \leq 1$) geht das zweite Integral über in

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt^1 = \frac{1}{2} (\sin t \cdot \cos t + t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hinweis: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$

Bemerkung: Wir haben uns in den Beispielen 10.5 und 10.6 jedesmal davon überzeugt, daß die bei der Substitutionsmethode auftretenden Funktionen φ und ψ auf den entsprechenden Intervallen umkehrbar eindeutig sind. Sehr oft nimmt man es mit solchen Feinheiten bei der Praxis des Integrierens nicht so genau; man führt die Substitution durch und ist froh, wenn diese Bemühungen zu einem Ergebnis führen. Das folgende Beispiel zeigt, daß ein allzu sorgloses Vorgehen bei der Anwendung des Satzes zu einem falschen Ergebnis führen kann.

Beispiel 10.7: Das Integral $I = \int_{-1}^1 x^2 \, dx$ kann man sofort berechnen: $I = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

Wir wollen jetzt I mit Hilfe der Substitutionsmethode für bestimmte Integrale berech-

¹⁾ $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, weil $\cos t \geq 0$ für alle $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

nen. Durch die Substitution $u = x^2$ ($du = 2x \, dx$, $x = \sqrt{u}$; $x_1 = -1$, $u_1 = 1$; $x_2 = 1$, $u_2 = 1$) erhalten wir

$$I = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \int_1^1 u \frac{du}{2\sqrt{u}} = 0 \quad (\text{obere Grenze} = \text{untere Grenze!}).$$

Wo liegt der Fehler? Antwort: Die Funktion $u = x^2$ ist auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ nicht umkehrbar eindeutig!

Wir hätten das richtige Ergebnis erhalten, wenn wir das Intervall $[-1, 1]$ in zwei Teilintervalle $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ zerlegt und auf die beiden Integrale $\int_{-1}^0 x^2 \, dx$ und $\int_0^1 x^2 \, dx$ getrennt die Substitutionsmethode für bestimmte Integrale angewendet hätten. Auf den beiden Teilintervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ ist $u = x^2$ jeweils umkehrbar eindeutig: $x = -\sqrt{u}$ bzw. $x = \sqrt{u}$ sind die entsprechenden Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 x^2 \, dx + \int_0^1 x^2 \, dx = \int_1^0 u \left(\frac{du}{-2\sqrt{u}} \right) + \int_0^1 u \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} \, du + \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} \, du = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} \right]_1^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe der Substitutionsmethode kann man

- a) die Integrationsgrenzen mittransformieren (s. Beispiele 10.5 und 10.6) oder
- b) die Integrationsgrenzen nicht mittransformieren (s. Beispiel 10.4).

Wir empfehlen, im allgemeinen der Methode b) den Vorzug zu geben, weil man sich auch bei etwas sorglosem Vorgehen (z. B. Nichtbeachten der Voraussetzung „ φ bzw. ψ umkehrbar eindeutig“) durch eine nachträgliche Probe (Differentiation der ermittelten Stammfunktion) von der Richtigkeit des gefundenen Ergebnisses überzeugen kann. Bei Methode a) ist das nicht möglich.

Man berechne (mit Hilfe der Substitutionsmethode) die folgenden bestimmten Integrale:

Aufgabe 10.5: $\int_0^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+2x}}.$

Aufgabe 10.6: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x - 4} \quad (\text{Subst. } u = \cos x).$

10.3. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale

10.3.1. Problemstellung

Die Berechnung des bestimmten Integrals von $f(x)$ über $[a, b]$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vgl. 10.2.3.) sofort möglich, wenn eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ bekannt ist:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Falls man bei der Ermittlung einer Stammfunktion auf zu große Schwierigkeiten stößt, so ist man darauf angewiesen, das bestimmte Integral näherungsweise zu berechnen. Das der näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals zugrunde liegende Prinzip ist sehr einfach: Man ersetzt die Funktion $f(x)$ durch eine Funktion $f^*(x)$, die sich von $f(x)$ möglichst wenig unterscheidet und deren Integration keine Schwierigkeiten bereitet. Es gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f^*(x) dx.$$

Die einfachste Möglichkeit wäre, die Kurve $f(x)$ durch ein Sehnepolygon zu ersetzen: Man zerlegt das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle und verbindet die jeweils aufeinanderfolgenden Punkte P_{i-1} und P_i geradlinig miteinander. Das so entstehende

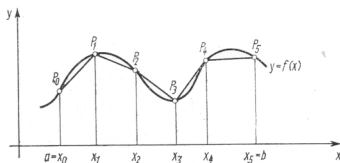


Bild 10.9

Sehnepolygon ist eine Näherung für die durch $y = f(x)$ dargestellte Kurve (s. Bild 10.9). Die Näherungsformel, die man erhält, wenn die Kurve $f(x)$ durch ein Sehnepolygon ersetzt wird, nennt man Sehnepolyformel oder Trapezformel. (Der Name „Trapezformel“ wurde gewählt, weil sich der unterhalb des Sehnepolygons liegende Bereich aus endlich vielen Trapezen zusammensetzt.)

Näherungsformeln werden vor allem auch dann benutzt, wenn die Kurve nicht durch einen geschlossenen Ausdruck $y = f(x)$ gegeben ist. In den Anwendungen kommt es häufig vor, daß von der Kurve auf dem Intervall $[a, b]$ nur endlich viele Punkte (Meßpunkte) $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bekannt sind. Wir werden sehen, daß bei allen Näherungsformeln für das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ nur die Kenntnis von endlich vielen Punkten $(x_i, f(x_i))$ mit $a < x_1 < x_2 < \dots < b$ erforderlich ist. Daher ist jede derartige Näherungsformel auch dann anwendbar, wenn von der Kurve nur endlich viele Punkte P_0, P_1, \dots, P_n bekannt sind. (Meist werden die bei einem Experiment gefundenen Meßwerte (x_i, y_i) in Tabellenform angegeben.) Selbstverständlich wird der durch die Näherungsformel ermittelte Wert dem tatsächlichen Wert des bestimmten Integrals um so näher kommen, je größer n ist.

10.3.2. Die Rechteck- und die Trapezformel

Satz 10.12: Das Intervall $[a, b] = [x_0, x_n]$ werde durch die Teilungspunkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in n gleiche Teile der Länge h zerlegt ($n \cdot h = b - a$). Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt für das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ folgende Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad \text{Rechteckformel}$$

$$(y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots).$$

Die Näherungsformel entsteht dadurch, daß man die Kurve $y = f(x)$ durch ein „Treppenvolygon“ ersetzt (s. Bild 10.10).

Satz 10.12 bedarf keines besonderen Beweises. Die rechts stehende Summe

$$h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = f(x_0) \cdot h + \dots + f(x_{n-1}) \cdot h$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (\Delta x_i = h, \xi_i = x_{i-1})$$

ist nämlich eine zu der vorgegebenen Zerlegung gehörige Integralsumme – und damit automatisch eine Näherung des bestimmten Integrals von $f(x)$ über $[a, b]$ (vgl. 10.1.1.).

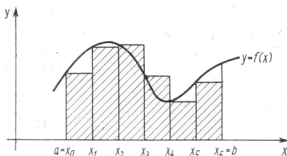


Bild 10.10

Man kann die Rechteckformel natürlich auch anders deuten: Man ersetze die Kurve $y = f(x)$ durch das „Treppenvolygon“ $y = f^*(x)$, welches wie folgt definiert ist:

$$f^*(x) = f(a) \quad \text{für } a \leq x < x_1,$$

$$f^*(x) = f(x_1) \quad \text{für } x_1 \leq x < x_2,$$

$$f^*(x) = f(x_2) \quad \text{für } x_2 \leq x < x_3 \quad \text{usw.}$$

(s. Bild 10.10). Für die „Näherungskurve“ $y = f^*(x)$ gilt dann:

$$\int_a^b f^*(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^*(x) dx &= \int_a^{x_1} f^*(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f^*(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^*(x) dx \\ &= \int_a^{x_1} f(a) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_{n-1}) dx \\ &= f(a) \cdot (x_1 - a) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= f(a) \cdot h + f(x_1) \cdot h + \dots + f(x_{n-1}) \cdot h \\ &= h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ sollten alle gleich lang sein!

Beispiel 10.8: Das bestimmte Integral $\int_0^4 x^3 dx$ soll näherungsweise mit Hilfe der Rechteckformel berechnet werden; das Intervall $[0, 4]$ soll in 4 gleiche Teile zerlegt werden.

Bei diesem einfachen Beispiel können wir den Wert des bestimmten Integrals sofort angeben: $\int_0^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 = 64$. Die Rechteckformel ergibt ($f(x) = x^3$, $h = 1$, $n = 4$):

$$\begin{aligned} \int_0^4 x^3 dx &\approx h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 1 \cdot (f(0) + f(1) + f(2) + f(3)) \\ &= 0 + 1 + 8 + 27 = 36. \end{aligned}$$

Die außerordentlich schlechte Übereinstimmung des Näherungswertes (36) mit dem tatsächlichen Wert (64) liegt bei diesem Beispiel vor allem darin begründet, daß die Funktion $y = x^3$ außerordentlich schnell in dem Intervall ansteigt. Man bedenke: Für $x = 2$ ist $f(x) = 8$, für $x = 3$ ist $f(x) = 27$, für $x = 4$ ist $f(x) = 64$. Insbesondere auf dem Intervall $[3, 4]$ ist der Unterschied zwischen dem „Näherungsrechteck“ und dem tatsächlichen Bereich (begrenzt durch $x = 3$, $x = 4$, $y = 0$ und $y = x^3$) außerordentlich groß.

S. 10.13 Satz 10.13: Das Intervall $[a, b] = [x_0, x_n]$ werde wieder durch die Teilungspunkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in n gleiche Teile der Länge h zerlegt. Die Näherungsformel, die man für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ erhält, wenn man die Kurve $y = f(x)$ durch ein Sehnepolygon ersetzt (s. Bild 10.9), lautet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] \quad \text{Trapezformel.}$$

Beweis: Das Sehnepolygon $y = f^*(x)$ wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$f^*(x) = \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot (x - x_0) + y_0 \quad \text{für } x_0 \leq x \leq x_1$$

(Gleichung der Geraden durch P_0, P_1 ; für $x = x_0$ ist $f^*(x_0) = y_0$, für $x = x_1$ ist $f^*(x_1) = y_1$)

$$f^*(x) = \frac{y_2 - y_1}{h} \cdot (x - x_1) + y_1 \quad \text{für } x_1 \leq x \leq x_2;$$

allgemein:

$$f^*(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot (x - x_{i-1}) + y_{i-1} \quad \text{für } x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Für die „Näherungskurve“ $y = f^*(x)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^*(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f^*(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f^*(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^*(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^*(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} (x - x_{i-1}) + y_{i-1} \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + y_{i-1} \cdot x \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1}) \frac{h}{2} \\
&= \frac{h}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right] = \frac{h}{2} \cdot \left[\left(y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) + \left(y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \right] \\
&= \frac{h}{2} \cdot \left[y_0 + y_n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right] = h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right].
\end{aligned}$$

Damit ist die Trapezformel bewiesen:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f^*(x) dx = h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right]. \blacksquare$$

Die Umformungen im eben durchgeführten Beweis betrachte man vor allem als eine gute Übung für den Umgang mit dem Summenzeichen!

Beispiel 10.9: Das bestimmte Integral $\int_0^4 x^3 dx$ soll näherungsweise mit Hilfe der Trapezregel berechnet werden; das Intervall $[0, 4]$ soll in 4 gleiche Teile zerlegt werden. – Wir haben absichtlich dasselbe Integral wie im Beispiel 10.8 gewählt, um zu sehen, welche Verbesserung die Trapezregel gegenüber der Rechteckformel bringt.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x^3 dx &\approx h \cdot \left[\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right] \\
&= 1 \cdot \left[\frac{f(0) + f(4)}{2} + f(1) + f(2) + f(3) \right] = 32 + 1 + 8 + 27 = 68.
\end{aligned}$$

Der Näherungswert (68) weicht hier nicht mehr so stark vom tatsächlichen Wert (64) ab, wie das bei der Rechteckregel der Fall ist (s. Beispiel 10.8). Daß die Trapezformel i. allg. eine wesentlich bessere Näherung liefert als die Rechteckregel, ist geometrisch unmittelbar einleuchtend (s. Bilder 10.10 und 10.9). Bei der Aussage „die Trapezformel liefert i. allg. eine bessere Näherung als die Rechteckregel“ setzt man natürlich stillschweigend voraus, daß man in beiden Fällen von der gleichen Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ausgeht.

Aufgabe 10.7: Das bestimmte Integral $\int_0^{10} x^3 dx$ soll näherungsweise mit Hilfe der * Trapezformel ermittelt werden; das Intervall $[0, 10]$ soll in 5 gleiche Teile zerlegt werden. Man vergleiche den ermittelten Näherungswert mit dem tatsächlichen Wert des bestimmten Integrals.

10.3.3. Die Simpsonsche Regel

Wir behandeln zunächst einen Spezialfall, die sog. Keplersche Faßregel. Der Name „Faßregel“ wurde gewählt, weil Kepler¹⁾ mit dieser von ihm entwickelten Regel das Volumen von Weinfässern berechnete.

S. 10.14 Satz 10.14: Das Intervall $[a, b] = [x_0, x_2]$ werde durch den Teilungspunkt $x_1 = \frac{a+b}{2}$ in zwei gleiche Teile der Länge $h = \frac{b-a}{2}$ zerlegt. Die Näherungsformel, die man für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ erhält, wenn man die Kurve $y = f(x)$ durch eine Parabel $y = f^*(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ersetzt, welche durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ hindurchgeht (s. Bild 10.11), lautet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{Keplersche Faßregel}$$

$(y_i = f(x_i); i = 0, 1, 2).$

Beweis: Es gilt: $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f^*(x) dx$. Wir zeigen, daß das rechts stehende Integral gleich $\frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2)$ ist.

$$\begin{aligned} \int_a^b f^*(x) dx &= \int_a^b (c_0 + c_1x + c_2x^2) dx = [c_0x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{3}c_2x^3]_a^b \\ &= c_0(b-a) + \frac{1}{2}c_1(b^2 - a^2) + \frac{1}{3}c_2(b^3 - a^3) \\ &= \frac{1}{6}(b-a) [6c_0 + 3c_1(b+a) + 2c_2(b^2 + ab + a^2)] \\ &= \frac{1}{6}(b-a) [(c_0 + c_0 + 4c_0) + (c_1a + c_1b + 2c_1(a+b)) \\ &\quad + (c_2a^2 + c_2b^2 + c_2(a+b)^2)] \\ &= \frac{1}{6}(b-a) \cdot \left[(c_0 + c_1a + c_2a^2) + (c_0 + c_1b + c_2b^2) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(c_0 + c_1 \frac{a+b}{2} + c_2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{6}(b-a) \left[f^*(a) + f^*(b) + 4f^*\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

(Nach Voraussetzung sollte die vorgegebene Kurve $y = f(x)$ mit der Parabel $y = f^*(x)$ die Punkte P_0, P_1, P_2 gemeinsam haben.) ■

Die Simpsonsche Regel erhält man sehr einfach aus der Keplerschen Faßregel, wenn man das Intervall $[a, b]$ in $n = 2m$ gleiche Teile zerlegt (s. Bild 10.12) und auf jeweils zwei benachbarte Intervalle die Keplersche Faßregel anwendet ($n = 2m$ heißt:

¹⁾ Johannes Kepler (1571–1630).

$[a, b]$ wird in eine gerade Anzahl gleicher Teile zerlegt). Zunächst gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x) dx.$$

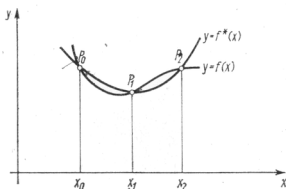


Bild 10.11

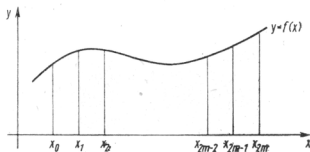


Bild 10.12

Wendet man auf jedes der auf der rechten Seite stehenden Integrale die Keplersche Faßregel an, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{x_2 - x_0}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{x_4 - x_2}{6} (y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &+ \dots + \frac{x_{2m} - x_{2m-2}}{6} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \end{aligned}$$

Wegen $x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \dots = x_{2m} - x_{2m-2} = \frac{b-a}{m}$ folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{6m} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) \\ &+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + y_{2m}). \end{aligned}$$

Das ist bereits die Simpsonsche Regel¹⁾.

Fassen wir noch einmal zusammen:

Satz 10.15: Das Intervall $[a, b]$ werde in eine gerade Anzahl $n = 2m$ gleicher Teile zerlegt (Teilungspunkte: $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m} = b$). Für das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ gilt dann folgende Näherungsformel: S. 10.15

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) \\ &+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + y_{2m}] \quad \text{Simpsonsche Regel.} \end{aligned}$$

Beispiel 10.10: Das bestimmte Integral $\int_0^4 x^3 dx$ soll näherungsweise mit Hilfe der Simpsonschen Regel berechnet werden; das Intervall $[0, 4]$ soll wieder in 4 gleiche Teile zerlegt werden (s. Beispiele 10.9 und 10.8).

¹⁾ Thomas Simpson (1710–1761).

Aus $n = 4$ und $n = 2m$ folgt $m = 2$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^4 x^3 dx &\approx \frac{4-0}{6 \cdot 2} [y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2) + y_4] \\ &= \frac{1}{3} \cdot [0 + 4(1 + 27) + 2 \cdot 8 + 64] = \frac{1}{3} \cdot 192 = 64. \end{aligned}$$

Der mit Hilfe der Simpsonschen Regel berechnete Näherungswert ist bei diesem Beispiel gleich dem tatsächlichen Wert des Integrals. Das ist bei der Funktion $f(x) = x^3$ kein Zufall, sondern Gesetzmäßigkeit. Es gilt nämlich: Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grade 2 oder 3, so steht in der Keplerschen Faßregel und damit auch in der Simpsonschen Regel das Gleichheitszeichen an Stelle des Zeichens \approx . Für $n = 2$ ist der eben festgestellte Sachverhalt auf Grund der Herleitung der Keplerschen Faßregel eine Selbstverständlichkeit (vgl. Satz 10.14). Hiervon ausgehend kann man leicht zeigen, daß der Sachverhalt auch für $n = 3$ gilt (vgl. [10], Bd. III).

Das Wesentliche, welches durch die Beispiele 10.8, 10.9 und 10.10 demonstriert werden soll, ist: Die Trapezformel liefert i. allg. eine bessere Näherung als die Rechteckregel; die Simpsonsche Regel wiederum liefert i. allg. eine bessere Näherung als die Trapezregel. Im allgemeinen wird man daher bei der näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen der Simpsonschen Regel den Vorzug geben.

Bei den Beispielen 10.8, 10.9 und 10.10 wurde absichtlich der einfache Integrand $f(x) = x^3$ gewählt; man hat dann sofort die Möglichkeit, den berechneten Näherungswert mit dem tatsächlichen Wert des Integrals zu vergleichen. Wir behandeln abschließend ein Beispiel, bei dem das zugehörige unbestimmte Integral nicht elementar auswertbar ist (vgl. Abschnitt 9.1.6.).

Beispiel 10.11: Mit Hilfe der Simpsonschen Regel berechne man näherungsweise

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$$

das Intervall $[a, b] = \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ werde in $n = 10$ gleiche Teile zerlegt. (Würde man $[0, \pi]$ als Integrationsintervall wählen, so wäre die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ im linken Eckpunkt des Intervalls nicht definiert; wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ handelt es sich aber um eine hebbare Unstetigkeit.)

Anwendung des Satzes 10.15 liefert:

$$I \approx \frac{\pi}{36} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}]. \quad (*)$$

Für die Teilungspunkte $x_0 (= a)$, $x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ gilt:

$$x_i = \frac{\pi}{6} + i \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} (2 + i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 10).$$

Die entsprechenden y_i -Werte berechnet man nach der Formel

$$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i} \sin x_i = \frac{12}{\pi(2+i)} \sin \frac{\pi}{12} (2+i) = \frac{12}{\pi} z_i,$$

wobei zur Abkürzung $z_i = \frac{1}{2+i} \sin(2+i) \frac{\pi}{12}$ gesetzt wurde. Aus der Beziehung (*) folgt dann:

$$I \approx \frac{1}{3} [z_0 + 4(z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9) + 2(z_2 + z_4 + z_6 + z_8) + z_{10}].$$

Mit

$$z_0 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} = 0,250,$$

$$z_1 = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \sin 45^\circ \approx \frac{1}{3} 0,707 \approx 0,236$$

usw. erhält man als Schlußergebnis:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,336.$$

Aufgabe 10.8: Das bestimmte Integral $\int_0^4 x^2 \sqrt{1+x^2} dx$ soll näherungsweise mit Hilfe * der Simpsonschen Regel berechnet werden; das Intervall $[0, 4]$ soll in 8 gleiche Teile zerlegt werden.

Wie in der Einleitung bereits betont wurde, wird bei der Anwendung einer derartigen Näherungsformel die Näherung um so genauer sein, je größer die Anzahl n der Teilintervalle ist. Diese allgemeine Feststellung reicht für die Anwendungen oft nicht aus. Man möchte genau wissen, welchen Fehler man bei der Anwendung einer bestimmten Näherungsformel gemacht hat. Dabei genügt es, wenn man weiß, wie groß der Fehler höchstens sein kann. Wenn der Fehler innerhalb einer solchen Schranke liegt, daß er für das betreffende Problem vernachlässigbar ist, kann man die Näherung als für das betreffende Problem gut ansehen. Der folgende Satz gibt Antwort auf die Frage, wie groß der dem Näherungswert anhaftende Fehler ist.

Satz 10.16: Wird das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ näherungsweise durch die Simpson- **S. 10.16**
sche Regel berechnet, wobei man davon ausgeht, daß das Intervall $[a, b]$ in eine gerade Anzahl $n = 2m$ gleicher Teile zerlegt wurde, so gilt für den Fehler R die Abschätzung

$$|R| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M,$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(4)}(x)|$ auf dem Intervall $[a, b]$ ist.

(Für M kann $\sup_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ gewählt werden!) Den Beweis findet man z. B. in [10], Bd. III, bzw. [14], Bd. II.

Hinweis: Die Güte der Simpsonschen Regel dokumentiert sich auch in dem folgenden Sachverhalt: Durch Halbierung aller Teilintervalle kommt man von einer Zerlegung Z_1 mit n Teilintervallen zu einer Zerlegung Z_2 mit $2n$ Teilintervallen; für die zugehörigen Fehler R_1 bzw. R_2 gilt: $|R_2| \leq \frac{1}{16} |R_1|$.

10.4. Einige Anwendungen des bestimmten Integrals

Wie in 8. schon dargelegt wurde, stellt die Integralrechnung ein unentbehrliches Hilfsmittel für die verschiedensten Wissensgebiete dar. Einige Anwendungen wurden in 8. bereits erwähnt, wir wollen ein weiteres Beispiel betrachten: Es ist allgemein bekannt, daß die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik in immer größerem Umfang in Natur- und Ingenieurwissenschaften angewendet werden. Auch in der Ökonomie sind die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik wichtige Hilfsmittel bei der Lösung der dort anstehenden Probleme. Auch hier muß gesagt werden, daß ohne Kenntnis der Integralrechnung es nicht möglich ist, die Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzubauen. Als Beispiel verweisen wir auf folgenden Zusammenhang: Bei einer stetig verteilten Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion $f(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X Werte aus dem Intervall $[a, b]$ annimmt, gleich $\int_a^b f(x) dx$.

Im folgenden werden wir einige Anwendungen des bestimmten Integrals in der Geometrie, in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und in der Ökonomie ausführlicher kennenlernen. Es wird sich um Anwendungen handeln, die relativ einfach zu übersehen und von allgemeinem Interesse sind.

10.4.1. Anwendungen in der Geometrie

Eine 1. Anwendung des bestimmten Integrals haben wir bereits in 10.1.2. (Beispiel 10.1) kennengelernt: Im Falle $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ liefert $\int_a^b f(x) dx$ den Flächeninhalt des durch die Kurven $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ begrenzten Bereichs in der x, y -Ebene. Eine einfache Folgerung ist die folgende Aussage: Im Falle $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ liefert das Integral den negativen Flächeninhalt des oben beschriebenen Bereichs.

Aus diesen beiden Aussagen ergibt sich folgende Verallgemeinerung.

S. 10.17 Satz 10.17: Ist B ein Bereich der x, y -Ebene, der „nach oben“ durch $y = f(x)$, „nach unten“ durch $y = g(x)$ und „seitlich“ durch $x = a$ bzw. $x = b$ begrenzt wird (s. Bild 10.13), so gilt für den Flächeninhalt A dieses Bereiches

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Voraussetzung: 1. $f(x)$ und $g(x)$ sind stetig auf $[a, b]$, 2. $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, d. h., die Kurve $y = f(x)$ verläuft stets oberhalb von der Kurve $y = g(x)$ auf dem

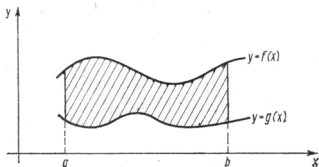


Bild 10.13

Intervall $[a, b]$. – Einen solchen Bereich B nennt man einen ebenen *Normalbereich*. Ebene Normalbereiche spielen eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Bereichsintegralen (Flächenintegralen); s. Band 5.

Der Beweis zu der in Satz 10.17 aufgestellten Behauptung ergibt sich im Falle $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ sofort aus Beispiel 10.1: *

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ist die Forderung $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ nicht erfüllt, so kann man durch eine einfache Parallelverschiebung in Richtung y -Achse erreichen, daß der Bereich B ganz oberhalb der x -Achse liegt. Für die parallelverschobenen Kurven

$$y = g^*(x), y = f^*(x) \quad \text{gilt:} \quad g^*(x) = g(x) + c, (c \geq 0), \\ f^*(x) = f(x) + c.$$

Der Flächeninhalt hat sich natürlich bei der Parallelverschiebung nicht geändert. Es gilt daher:

$$A = \int_a^b f^*(x) dx - \int_a^b g^*(x) dx = \int_a^b (f(x) + c) dx - \int_a^b (g(x) + c) dx \\ = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b c dx - \int_a^b g(x) dx - \int_a^b c dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Beispiel 10.12: Von dem durch die Kurven $x = 1$, $x = 4$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{4}{x}$ begrenzten Bereich B (s. Bild 10.14) berechne man den Flächeninhalt A .

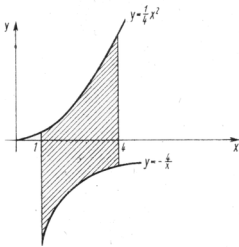


Bild 10.14

Es gilt:

$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{4}{x} \right) \right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + 4 \ln |x| \right]_1^4 \\ = \frac{16}{3} + 4 \cdot \ln 4 - \frac{1}{12} = 10,79.$$

Aufgabe 10.9: Es ist der Flächeninhalt des von den Kurven $x = 0$, $x = 4$, $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, * $y = -x$ begrenzten Bereichs B zu berechnen. (Man skizziere zunächst den Bereich B ; er liegt ganz im 1. und 4. Quadranten.)

- * **Aufgabe 10.10:** Man ermittle den Flächeninhalt des von den Kurven $y = \frac{1}{2}x^2$ und $y = 2x$ eingeschlossenen Bereichs. (Der Bereich liegt ganz im 1. Quadranten.)

Ergänzungen zum Satz 10.17: Selbstverständlich hat man nicht nur von Normalbereichen den Flächeninhalt zu bestimmen. Die in Satz 10.17 angegebene Formel für den Flächeninhalt von Normalbereichen reicht aber aus, um auch den Flächeninhalt eines allgemeinen Bereichs B zu bestimmen. Man braucht ja nur den Bereich B in (endlich viele) Normalbereiche zu zerlegen – was in allen praktisch vorkommenden Fällen möglich ist – und auf jeden Normalbereich die in Satz 10.17 angegebene Formel anzuwenden. Es muß allerdings garantiert sein, daß die „obere“ und „untere“ Kurve durch eine Gleichung der Form $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ gegeben ist (s. Bild 10.13).

Hat man ein Flächenstück in der x, y -Ebene, welches von zwei Strecken $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ und einem die Punkte P_1 und P_2 verbindenden Kurvenstück \mathcal{C}_1 begrenzt wird – es handelt sich um eine sog. „Sektorfläche“ (s. Bild 10.15; das Kurvenstück \mathcal{C}_2 und die zweite Schraffur zwischen \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_1 werden zunächst nicht berücksichtigt), so erhält man für den Flächeninhalt A dieses Flächenstückes:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \quad (\text{Sektorformel}).$$

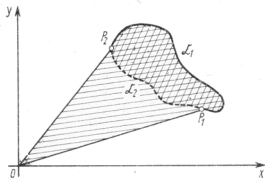


Bild 10.15

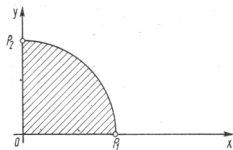


Bild 10.16

Hierbei ist $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $\alpha < \beta$, eine Parameterdarstellung des die Punkte P_1 und P_2 verbindenden Kurvenstücks \mathcal{C}_1 ; \dot{x} bzw. \dot{y} sind die Ableitungen von x bzw. y nach t (Beweis der Sektorformel siehe z. B. [10], Bd. III, Nr. 54).

Die Sektorformel soll auf ein einfaches Beispiel angewendet werden! $x = R \cdot \cos t$, $y = R \cdot \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ist Parameterdarstellung eines Viertelkreises mit dem Anfangspunkt $P_1(R, 0)$ und dem Endpunkt $P_2(0, R)$. Von dem durch die Strecken $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ und dem Viertelkreis begrenzten Flächenstück (s. Bild 10.16) soll der Flächeninhalt mit Hilfe der Sektorformel berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R \cdot \cos t)(R \cdot \cos t) - (R \cdot \sin t)(-R \cdot \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 t + \sin^2 t] dt = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{4} \pi R^2. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt den Flächeninhalt A des ebenen Flächenstückes berechnen, das von einer in Parameterdarstellung gegebenen geschlossenen, doppelunktfreien Kurve $\mathcal{C}: x = x(t), y = y(t)$, die im Intervall $\alpha \leq t \leq \gamma$ definiert ist, begrenzt wird. Denkt man sich (s. Bild 10.15) \mathcal{C} aus den beiden Teilstücken \mathcal{C}_1 mit $x = x(t), y = y(t), (\alpha \leq t \leq \beta)$ und \mathcal{C}_2 mit $x = x(t), y = y(t) (\beta \leq t \leq \gamma)$ zusammengesetzt, dann gilt nach der Sektorformel für den Flächeninhalt A_1 des Sektors, der von $\overline{OP}_1, \mathcal{C}_1$ und \overline{OP}_2 begrenzt wird

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

und für den Flächeninhalt A_2 des Sektors, der von $\overline{OP}_1, \mathcal{C}_2$ und \overline{OP}_2 begrenzt wird,

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

Die nach der Sektorformel ermittelten Flächen A_1 und A_2 sind „vorzeichenbehaftet“. Durch die Parameterdarstellung ist die Kurve orientiert. A ist positiv, falls die Fläche im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird, andernfalls negativ.

Für das von der geschlossenen Kurve \mathcal{C} eingeschlossene Flächenstück A (im Bild 10.15 doppelt schraffiert gezeichnet) folgt dann

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{\alpha}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt - \int_{\gamma}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \right]$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\gamma} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \oint (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.^1)$$

Dabei müssen natürlich einige Voraussetzungen über $x(t), y(t)$ gemacht werden, die in den praktischen Anwendungen erfüllt sind. Neben den Voraussetzungen $x(\alpha) = x(\gamma), y(\alpha) = y(\gamma)$ („Anfangspunkt“ $(x(\alpha), y(\alpha))$ fällt mit „Endpunkt“ $(x(\gamma), y(\gamma))$ zusammen: geschlossene Kurve) und $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ für je zwei verschiedene t -Werte t_1, t_2 aus (α, γ) („doppelunktfreie“ Kurve) muß folgende Bedingung erfüllt sein: Das Intervall $[\alpha, \gamma]$ kann so in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, daß in jedem Teilintervall die Funktion $x(t)$ stetig differenzierbar und im engeren Sinne monoton oder konstant ist. Für $y(t)$ sollen dieselben Voraussetzungen gelten.

Die Inhaltsberechnung von Flächenstücken, die von in Parameterdarstellung gegebenen Kurven begrenzt sind, konnte hier nur angedeutet werden. Näheres findet man z. B. in [10], Bd. III, oder [18], 15. Lehrbrief.

Aufgabe 10.11: a) $x = 6 \frac{\cos t}{t}, y = 6 \frac{\sin t}{t}$ ($0 < t < \infty$) ist Parameterdarstellung *

einer hyperbolischen Spirale (vgl. [1]). $P_1 \left(0, \frac{12}{\pi}\right)$ und $P_2 \left(0, -\frac{4}{\pi}\right)$ sind zwei Punkte dieser Spirale mit $t_1 = \frac{\pi}{2}$ und $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ (bitte nachprüfen!). Man berechne den Flächeninhalt A der durch diese Kurve und die Strecken $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2$ begrenzten Sektorfläche.

¹⁾ Das Zeichen \oint bedeutet *Umlaufintegral*. Es wird verwendet, wenn über eine geschlossene Kurve integriert wird.

b) $r = a\varphi$ ist die Gleichung einer Archimedischen Spirale in Polarkoordinaten r, φ ($0 \leq \varphi < \infty$, a : positive Konstante; vgl. [1]). $P_1(r_1, \varphi_1)$ und $P_2(r_2, \varphi_2)$ seien zwei Punkte dieser Spirale mit $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2$. Man beweise, daß für den Flächeninhalt A des durch die Spirale und die Strecken $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ begrenzten Sektorfläche gilt: $A = \frac{1}{6}a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$.

Hinweis: Man gehe von $r = a\varphi$ zu einer Parameterdarstellung $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ über!

Wir wollen jetzt die *Länge eines ebenen Kurvenstücks* $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, berechnen. Dabei setzen wir voraus, daß $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist. Die Voraussetzung „stetig differenzierbar“ garantiert, daß das Kurvenstück eine bestimmte Länge hat, die mit der nachher abzuleitenden Formel (s. Satz 10.18) berechnet werden kann. Selbstverständlich haben auch viele andere Kurvenstücke, bei denen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, eine bestimmte Länge. Kurvenstücke, die eine bestimmte Länge besitzen, nennt man *rektifizierbar*. Dabei stellen wir uns auf den anschaulichen Standpunkt, daß jedem nicht allzu kompliziert aufgebauten Kurvenstück eine bestimmte Länge zukommt – obwohl in Wirklichkeit die mit dem Begriff „Länge“ und der Längenberechnung zusammenhängenden Fragen nicht ganz trivial sind. Genauer über die Begriffe „Kurvenstück“, „Länge“ und „Rektifizierbarkeit“ findet man z. B. in [10], Bd. III.

Wenden wir uns nun unserer eigentlichen Aufgabe zu, nämlich der Bestimmung der Länge des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Wie bei der Herleitung der Trapezformel (s. Bild 10.9) zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit der Länge Δx_i ($i = 1, \dots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$). Die Länge des Sehnepolygons $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ können wir elementargeometrisch sofort berechnen. Für die Länge Δs_i der P_{i-1} mit P_i verbindenden Sehne gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras: $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Hierbei gilt: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (s. 6.2.) gibt es ein $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so daß gilt: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$. Für Δs_i ergibt sich dann: $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i)^2}$

$$= \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}.$$

Die Länge des Sehnepolygons ist dann gleich

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Diese Summe stellt eine Näherung der gesuchten Länge s des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, dar; sie ist um so genauer, je feiner die Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Den genauen Wert von s erhält man durch den in 10.1.2. beschriebenen Grenzprozeß:

$$s = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Der besseren Übersichtlichkeit halber führen wir noch eine Abkürzung ein:

$\varphi(x) := \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Es gilt dann:

$$s = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Hieraus folgt (vgl. 10.1.2.)

$$s = \int_a^b \varphi(x) \, dx, \quad \text{also} \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Damit haben wir unsere gesuchte Formel gefunden! Fassen wir das Ergebnis zusammen!

Satz 10.18: Für die Bogenlänge s des ebenen Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gilt: **S. 10.18**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Voraussetzung: $y = f(x)$ ist auf $[a, b]$ stetig differenzierbar.)

Beispiel 10.13: Von dem Kurvenstück $y = \frac{1}{3}x^2$, $0 \leq x \leq 6$, berechne man die Bogenlänge s .

Nach Satz 10.18 gilt: $s = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2} dx$. Durch die Substitution $z = \frac{2}{3}x$ (s. 10.2.4.) erhält man

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 \sqrt{1 + z^2} \cdot \frac{3}{2} dz = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} (z \cdot \sqrt{z^2 + 1} + \operatorname{arsinh} z) \right]_0^4 \\ &= \frac{3}{4} [z \cdot \sqrt{z^2 + 1} + \ln(z + \sqrt{1 + z^2})]_0^4 = \frac{3}{4} \cdot (4\sqrt{17} + \ln(4 + \sqrt{17})) \\ &\approx \frac{3}{4} \cdot (4\sqrt{17} + \ln 8,123) \approx 12,37 + \frac{3}{4} \cdot 2,09 \approx 13,94. \end{aligned}$$

Hinweis: Das Integral $\int \sqrt{1 + x^2} dx$ findet man in jeder einschlägigen Formelsammlung (siehe z. B. [1]); bei der Behandlung der hyperbolischen Funktionen wurde die Beziehung $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ hergeleitet.

Aufgabe 10.12: Man berechne die Bogenlänge des Kurvenstücks $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$. *

Ist ein Kurvenstück nicht in der Form $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gegeben, sondern durch eine Parameterdarstellung (Parameter: t)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

so gelangt man bei der Berechnung der Bogenlänge s zu einer Formel, die der in Satz 10.18 angegebenen sehr ähnlich ist.

Satz 10.19: Für die Länge s des ebenen Kurvenstücks $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, **S. 10.19** gilt:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt.$$

(Hierbei muß natürlich vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ auf $[t_1, t_2]$ stetig differenzierbar sind. Mit $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ wird die Ableitung von $\varphi(t)$ bzw. $\psi(t)$ nach t bezeichnet: $\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt}$, $\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt}$.)

Beispiel 10.14: Von dem Kurvenstück $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ berechne man die Bogenlänge (Parameter: φ). Wir kennen das Ergebnis – nämlich $s = \pi r$ –, denn bei diesem Kurvenstück handelt es sich um einen Halbkreis vom Ra-

dius r . Dasselbe Ergebnis müssen wir natürlich auch mit der in Satz 10.19 angegebenen Formel erhalten:

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-r \cdot \sin \varphi)^2 + (r \cdot \cos \varphi)^2} d\varphi \\&= \int_0^{\pi} r \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} r d\varphi = \pi r.\end{aligned}$$

Beispiel 10.15: Von dem Kurvenstück $x = a \cdot \cos \varphi$, $y = b \cdot \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, berechne man die Bogenlänge. (Es handelt sich um eine Parameterdarstellung einer Vierteilellipse; aus $x = a \cdot \cos \varphi$, $y = b \cdot \sin \varphi$ folgt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.) Nach Satz 10.19 gilt:

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a \cdot \sin \varphi)^2 + (b \cdot \cos \varphi)^2} d\varphi = b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \varphi} d\varphi \\&= b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} d\varphi\end{aligned}$$

($e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$, wobei $b > a$ vorausgesetzt wird; e : numerische Exzentrizität.)

Das gefundene Integral kann i. allg. nicht elementar gelöst werden (vgl. Bemerkung in 9.3.5.).

Ein Integral der Form $\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \psi} d\psi =: E(e, \varphi)$ nennt man *elliptisches Integral 2. Gattung* (vgl. [1]). Diese Integrale sind in Tafelwerken (z. B. [8]) zu finden.

- * **Aufgabe 10.13:** Von der logarithmischen Spirale $r = a \cdot e^{k\varphi}$ berechne man die Bogenlänge des zwischen den Punkten mit den φ -Werten φ_1 und φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) gelegenen Bogens (s. Bild 10.17). (Hinweise: $r = a \cdot e^{k\varphi}$, $-\infty < \varphi < \infty$ ist die Gleichung der Spirale in Polarkoordinaten; a und k sollen positive Konstanten sein. Ersetzt man in den Gleichungen $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$ die Größe r durch $a \cdot e^{k\varphi}$, so erhält

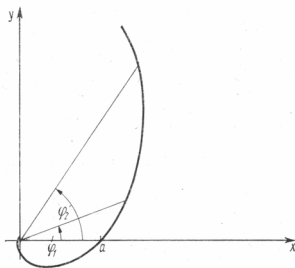


Bild 10.17

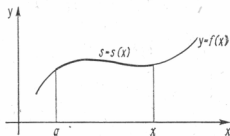


Bild 10.18

man eine Parameterdarstellung für die Spirale (Parameter: φ). Näheres über Spiralen findet man z. B. in [1]).

Ergänzung zu Satz 10.18: Wenn man in der Formel

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

die obere Grenze variabel läßt, so ist s natürlich von der oberen Grenze abhängig

$$s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

(s. Bild 10.18). Aus dieser Gleichung folgt (s. Satz 10.8)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Für das Differential der Funktion $s = s(x)$ an der Stelle x mit dem Zuwachs dx gilt dann:

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

ds nennt man das *Bogendifferential* (oder Bogenelement). Wegen $dy = f'(x) dx$ (Differential der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x mit dem Zuwachs dx) folgt hieraus

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Diese Gleichung gilt auch für Kurven, die in Parameterdarstellung gegeben sind. Es gilt: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Hieraus folgt: $dx = \dot{\varphi}(t) dt$, $dy = \dot{\psi}(t) dt$.

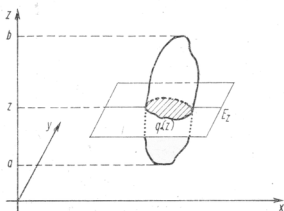


Bild 10.19

Das Volumen V eines räumlichen Bereiches (Körpers) B kann man i. allg. nur mit Raumintegralen (s. Band 5) berechnen. Wenn man aber die zur x, y -Ebene parallelen Schnittflächen von B berechnen kann, so kann man durch ein gewöhnliches Integral das Volumen von B bestimmen. Es gilt:

Satz 10.20: Bezüglich eines rechtwinklig kartesischen Koordinatensystems sei a die untere und b die obere Grenze der z -Koordinate der Punkte eines räumlichen Bereiches B . Für jedes z zwischen a und b ($a \leq z \leq b$) sei E_z diejenige Ebene, welche durch den Punkt $(0, 0, z)$ hindurchgeht und parallel zur x, y -Ebene liegt. Mit $q(z)$ wird der Inhalt der durch die Ebene E_z aus B ausgeschnittenen Fläche bezeichnet (s. Bild 10.19). Für das Volumen V des räumlichen Bereiches B gilt dann:

$$V = \int_a^b q(z) dz.$$

Voraussetzung: $q(z)$ ändert sich stetig mit z . (Der Buchstabe q soll an das Wort „Querschnitt“ erinnern.)

Wie gelangt man zu der in Satz 10.20 angegebenen Formel? Es gelte $z_0 = a < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < b = z_n$. Die Ebenen $z = z_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) zerlegen den räumlichen Bereich B in „Scheiben“. Für das Volumen einer solchen Scheibe gilt näherungsweise $q(\xi_i) \cdot \Delta z_i$, wobei $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ und $z_{i-1} \leq \xi_i \leq z_i$ gilt. Die „Scheibe“ wurde näherungsweise durch einen Zylinder mit der Grundfläche $q(\xi_i)$ und der Höhe Δz_i ersetzt. Summiert man über alle diese Zylinder, so erhält man eine Näherung für das gesuchte Volumen V von B .

$$V \approx \sum_{i=1}^n q(\xi_i) \cdot \Delta z_i.$$

Den genauen Wert von V erhält man durch den in 10.1.2. beschriebenen Grenzprozeß:

$$V = \lim_{\Delta z_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n q(\xi_i) \cdot \Delta z_i.$$

Unter der Voraussetzung, daß $q(z)$ stetig ist, existiert der rechts stehende Grenzwert und ist gleich

$$\int_a^b q(z) dz \quad (\text{s. Formel (10.2) in 10.1.2}).$$

Bemerkung: Wird der räumliche Bereich B durch Ebenen E_x bzw. E_y parallel zur y, z -Ebene bzw. x, z -Ebene geschnitten, so erhält man an Stelle von $V = \int_a^b q(z) dz$ die Formeln $V = \int_c^d q(x) dx$ bzw. $V = \int_e^f q(y) dy$. Hierbei sind jetzt c, d bzw. e, f die Grenzen bezüglich der x -Koordinate bzw. y -Koordinate.

Aus Satz 10.20 folgt auch, daß zwei Körper das gleiche Volumen haben, wenn sie für jedes z den gleichen Querschnitt $q(z)$ haben. Dies ist das sog. *Prinzip von Cavalieri*¹⁾.

Beispiel 10.16: Mit Hilfe der in Satz 10.20 angegebenen Formel soll das Volumen V einer regulären Pyramide (s. [1]) mit quadratischer Grundfläche (Kantenlänge a) und der Höhe h berechnet werden.

Legt man durch die Achse der Pyramide eine Ebene, welche gleichzeitig parallel zu einer Seite des Grundquadrats verläuft, so erhält man die in Bild 10.20 dargestellte Schnittfigur. Es gilt: $r : a = (h - z) : h$ (Strahlensatz). Hieraus folgt:

$$r = \frac{a}{h} (h - z).$$

Aus Satz 10.20 folgt dann:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h q(z) dz = \int_0^h r^2 dz = \int_0^h \left(\frac{a}{h} (h - z) \right)^2 dz = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h - z)^2 dz \\ &= \left[\frac{a^2}{h^2} \left(-\frac{1}{3} (h - z)^3 \right) \right]_{z=0}^{z=h} = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 = \frac{a^2 h}{3}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist uns natürlich aus der Elementargeometrie schon bekannt.

¹⁾ Bonaventura Cavalieri (gest. 1647).

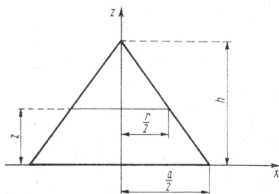


Bild 10.20

Mit Hilfe von Satz 10.20 können wir nun auch sofort das *Volumen von Rotationskörpern* berechnen. Es gilt

Satz 10.21: B_{xy} sei der durch die Kurven $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ begrenzte Bereich in der x, y -Ebene (Vor.: $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$). B sei der durch Rotation von B_{xy} um die x -Achse entstehende Bereich (s. Bild 10.21). Für das Volumen V von B gilt: S. 10.21

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

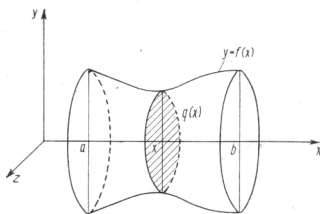


Bild 10.21

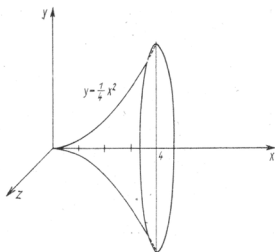


Bild 10.22

Beweis: Die zur y, z -Ebene parallelen Ebenen E_x schneiden aus dem Rotationskörper Kreisscheiben mit dem Flächeninhalt $q(x) = \pi \cdot r^2 = \pi(f(x))^2$ aus. Also gilt:

$$V = \int_a^b q(x) dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx.$$

Beispiel 10.17: Von dem durch Rotation der Kurve $y = \frac{1}{4}x^2$, $0 \leq x \leq 4$, um die x -Achse entstehenden Rotationskörper (s. Bild 10.22) berechne man das Volumen V . Nach Satz 10.21 gilt:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx = \pi \cdot 12,8 \approx 40,21.$$

Aufgabe 10.14: Von dem durch Rotation der Kurve $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$, um die x -Achse entstehenden Rotationskörper berechne man das Volumen V . (Streng-

genommen entsteht durch Rotation von $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$, eine Rotationsfläche. Der Rotationskörper entsteht durch Rotation des von den Kurven $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$ und $x = 9$ begrenzten Bereiches um die x -Achse.)

Bei der Bestimmung des Oberflächeninhalts eines im Raum gelegenen krummen Flächenstücks benötigt man i. allg. sogenannte Oberflächenintegrale, die erst in Band 5 eingeführt werden. Bei Rotationsflächen (das sind solche Flächen, die durch Rotation einer ebenen Kurve C um eine in ihrer Ebene liegende Gerade g – der sog. Rotationsachse – entstehen) kann man den Oberflächeninhalt durch gewöhnliche Integrale berechnen. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft!

S. 10.22 Satz 10.22: Rotiert die Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, um die x -Achse, so gilt für den Flächeninhalt A der zugehörigen Rotationsfläche

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Vorausgesetzt wird dabei

1. $f(x) > 0$ für $x \in [a, b]$,
2. $f(x)$ ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$.

Beweis: Wir betrachten die Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Das Intervall $[a, b]$ wird zunächst wieder in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit der Länge Δx_i ($i = 1, \dots, n$) zerlegt. ξ_i sei der Mittelpunkt des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$. Das oberhalb des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$ gelegene „Kurvenstück“ von $y = f(x)$ wird durch ein „Tangentenstück“ T_i ersetzt, wobei T die Tangente in dem zu $x = \xi_i$ gehörigen Kurvenpunkt $(\xi_i, f(\xi_i))$ bedeutet (s. Bild 10.23). Läßt man das Tangentenstück T_i um die x -Achse rotieren, so entsteht der Mantel eines Kegelstumpfes, dessen Oberflächeninhalt A_i nach einer elementargeometrischen Formel berechnet werden kann. Für die Länge l_i des Tangentenstücks T_i gilt: $l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$. (Den Beweis dieser Gleichung betrachte man als eine kleine Übungsaufgabe! Ausgangspunkt ist dasjenige rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse gleich T_i ist und dessen darunter liegende Kathete die Länge $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ hat.) Damit sind alle Größen, die zur Berechnung des Oberflächeninhalts A_i des Kegelstumpfes erforderlich sind, gegeben (s. Bild 10.24).

$$A_i = \pi \cdot l_i \cdot 2f(\xi_i) \quad (\text{s. [1], Abschnitt Stereometrie}).$$

Hieraus folgt: $A_i = 2\pi \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot f(\xi_i) \Delta x_i$.

Die Summe über alle A_i ($i = 1, \dots, n$) kann als eine Näherung für den gesuchten Oberflächeninhalt A der Rotationsfläche angesehen werden, falls die Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle genügend fein ist: $A \approx \sum_{i=1}^n A_i$. (Man interpretiere noch einmal

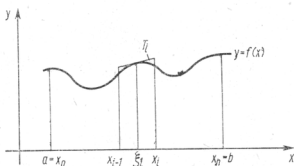


Bild 10.23

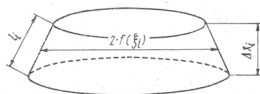


Bild 10.24

diesen Sachverhalt geometrisch an Hand von Bild 10.23! Man vergleiche die durch Rotation von $y = f(x)$ entstehende Rotationsfläche mit derjenigen Rotationsfläche, die durch Rotation der n Tangentenstücke T_i ($i = 1, \dots, n$) um die x -Achse entsteht)! Es gilt also:

$$A \approx \sum_{i=1}^n A_i = 2\pi \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right).$$

Den genauen Wert von A erhält man wieder durch den in 10.1.2. beschriebenen Grenzprozeß:

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(2\pi \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i \right).$$

Setzt man zur Abkürzung $f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \Phi(x)$, so erhält man:

$$A = 2\pi \cdot \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Phi(\xi_i) \Delta x_i = 2\pi \cdot \int_a^b \Phi(x) dx \quad [\text{s. Formel (10.2)}].$$

Damit erhalten wir das Schlußergebnis:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \blacksquare$$

(Hinweis: Der Grenzwert existiert, weil auf Grund der Voraussetzung „ $f(x)$ stetig differenzierbar“ die Funktion $\Phi(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und folglich nach Satz 10.1 auch integrierbar ist.)

Beispiel 10.18: Von der durch Rotation der Kurve $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x \leq 4$, (Parabelstück) um die x -Achse entstehenden Rotationsfläche berechne man den Oberflächeninhalt A .

Nach Satz 10.22 gilt: $A = 2\pi \int_0^4 \frac{1}{2}x^2 \sqrt{1 + x^2} dx. \quad (*)$

Das Integral $\int x^2 \sqrt{1 + x^2} dx$ ist ein Integral vom Typ $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, welches wir im Prinzip lösen können (s. 9.3.4.). Da aber die Lösung dieses Integrals schon einen gewissen Aufwand erfordert, erlauben wir uns an dieser Stelle, das Ergebnis einer Formelsammlung zu entnehmen (siehe z. B. [1], Tabelle der unbestimmten Integrale). Es gilt:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1 + x^2} dx &= \frac{x}{4} (1 + x^2) \sqrt{1 + x^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} [x \sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})]. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (*) folgt dann: $A = \pi (17 \cdot \sqrt{17} - \frac{1}{2} \sqrt{17} - \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{17}))$. Die numerische Auswertung ergibt $A = 212,9$.

Aufgabe 10.15: Von der durch Rotation der Kurve $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$, um die x -Achse entstehenden Rotationsfläche berechne man den Oberflächeninhalt A .

10.4.2. Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften

Erste Anwendung: Wie groß ist die Arbeit, die von einer variablen Kraft längs eines geradlinigen Weges geleistet wird?

Beginnen wir mit einer einfacheren Fragestellung. Vorgegeben sei eine Strecke \overline{AB} mit der Länge s . In Richtung dieser Strecke greife eine konstante Kraft F^1) vom Betrag F an (s. Bild 10.25). Die von dieser Kraft längs der (orientierten) Strecke von A nach B geleistete Arbeit W ist dann

$$W = F \cdot s \quad (\text{„Arbeit“} = \text{„Kraft“ mal „Weg“}).$$

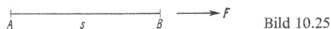


Bild 10.25



Bild 10.26

Schwieriger wird die Berechnung von W , wenn die Kraft nicht mehr konstant ist, sondern sich von Punkt zu Punkt ändert. Man denke z. B. an die beim Entspannen einer elastischen Feder auftretende Kraft!

Um das Problem rechnerisch erfassen zu können, denken wir uns die Strecke von A nach B als einen Teil der x -Achse, wobei die Punkte A und B durch $x = a$ bzw. $x = b$ festgelegt sind. Die Kraft soll wieder in Richtung dieser Strecke angreifen, aber sich von Punkt zu Punkt ändern, d. h. $F = F(x)$ (s. Bild 10.26). Wie groß ist die von dieser Kraft F mit dem Betrag $F = F(x)$ längs der (orientierten) Strecke von A nach B geleistete Arbeit W ?

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$), wobei $x_0 = a$ und $x_n = b$ gesetzt wird (vgl. 10.1.1.). In jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ wählen wir einen Zwischenpunkt ξ_i . Es ist dann $F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ eine Näherung für die von der Kraft $F = F(x)$ auf dem Weg von x_{i-1} bis x_i geleistete Arbeit; Δx_i ist wieder die Länge des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$. Folglich ist $\sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ eine Näherung für die gesuchte Arbeit W . Den genauen Wert von W erhält man durch den Grenzprozeß $\Delta x_i \rightarrow 0$:

$$W = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Hieraus folgt (vgl. 10.1.2.)

$$W = \int_a^b F(x) \, dx.$$

Fassen wir unser Ergebnis zusammen!

Ergebnis: Die in Richtung der positiven x -Achse angreifende Kraft $F = F(x)$ mit dem Betrag $F = F(x)$ leistet längs des Weges von $x = a$ bis $x = b$ ($a < b$) die Arbeit

$$W = \int_a^b F(x) \, dx. \quad (*)$$

Beispiel 10.19: Wie groß ist die von einer Schraubenfeder beim Entspannen geleistete Arbeit (s. Bild 10.27)? Zunächst vermerken wir als Erfahrungstatsache, daß $F(x)$

¹⁾ Vektoren werden durch halbfette Buchstaben bezeichnet.

sich linear mit x ändert, d. h. $F(x) = px + q$. Aus $F(b) = 0$ und $F(x)$ monoton fallend auf $[a, b]$ folgt: $pb + q = 0$ und $F'(x) = p < 0$. Also gilt: $F(x) = px - pb = -p(b - x)$. Wir setzen

$$F(x) = c(b - x) \quad \text{mit} \quad c > 0.$$

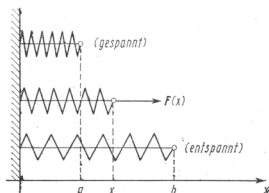


Bild 10.27

Aus (*) folgt:

$$W = \int_a^b c(b - x) dx = \left[-\frac{c}{2}(b - x)^2 \right]_a^b = \frac{c}{2}(b - a)^2.$$

Zweite Anwendung: Vorgegeben ist ein ebener Bereich B , der von den Kurven $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ (Vor.: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$) begrenzt wird. B denke man sich mit einer Massenbelegung der Flächendichte $\varrho = \text{const}$ versehen. Gesucht ist der Schwerpunkt $S(x_S, y_S)$ von B (s. Bild 10.28). Für die Ermittlung des Schwerpunktes S von B benötigen wir den folgenden Satz:

Für den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) eines Systems von Massenpunkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ mit den Massen m_1, m_2, \dots, m_n gelten die aus der elementaren Mechanik bekannten Formeln

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}. \quad (**)$$

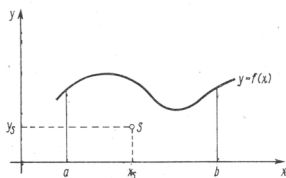


Bild 10.28

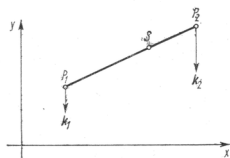


Bild 10.29

Der Beweis dieser Formeln ergibt sich für $n = 2$ sehr einfach aus dem Hebelgesetz: $k_1 = m_1 \cdot g$ und $k_2 = m_2 \cdot g$ sind die in P_1 bzw. P_2 angreifenden Schwerkraften mit den Beträgen $k_1 = m_1 g$ bzw. $k_2 = m_2 g$. Für den Schwerpunkt S des Systems der beiden Massenpunkte P_1 und P_2 muß gelten (s. Bild 10.29):

$$|\overrightarrow{P_1 S}| \cdot k_1 = |\overrightarrow{S P_2}| \cdot k_2.$$

Hieraus folgt (wegen $k_1 = m_1 \cdot g$ und $k_2 = m_2 \cdot g$):

$$|\overrightarrow{P_1S}| \cdot m_1 = |\overrightarrow{SP_2}| \cdot m_2.$$

Hieraus wiederum ergibt sich – wegen der gleichsinnigen Parallelität der Vektoren $\overrightarrow{P_1S}$ und $\overrightarrow{SP_2}$ – die Vektorgleichung:

$$m_1 \cdot \overrightarrow{P_1S} = m_2 \cdot \overrightarrow{SP_2}.$$

Diese Vektorgleichung ist äquivalent mit den beiden gewöhnlichen Gleichungen $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$, $m_1(\bar{y} - y_1) = m_2(y_2 - \bar{y})$. Auflösung nach \bar{x} bzw. \bar{y} ergibt die Formeln

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Für $n = 3$ geht man folgendermaßen vor: Man bestimmt zunächst den Schwerpunkt S_{12} des Systems P_1, P_2 . Anschließend wird der Schwerpunkt des Systems S_{12} (Masse $m_1 + m_2$), P_3 (Masse m_3) bestimmt.

Mit Hilfe von (**) können wir nun auch den Schwerpunkt S des Bereiches B bestimmen. Das Intervall $[a, b]$ wird zunächst wieder in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit der Länge Δx_i ($i = 1, \dots, n$; $x_0 = a, x_n = b$) zerlegt. ξ_i sei der Mittelpunkt des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$. Für kleines Δx_i ist der Schwerpunkt des durch $x = x_{i-1}, x = x_i, y = 0, y = f(x)$ begrenzten Streifens ST_i ungefähr gleich dem Schwerpunkt des durch $x = x_{i-1}, x = x_i, y = 0, y = f(\xi_i)$ begrenzten Rechtecks RE_i (s. Bild 10.30). Bei konstanter Dichte ist der Schwerpunkt eines Rechtecks gleich dem sog. geometrischen Schwerpunkt des Rechtecks; für den Schwerpunkt des Rechtecks RE_i gilt: $\bar{x}_i = \xi_i$, $\bar{y}_i = \frac{1}{2}f(\xi_i)$. Die Masse von ST_i ist ungefähr gleich der Masse von RE_i : $m(ST_i) \approx m(RE_i) = \rho \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ („Dichte“ mal „Flächeninhalt“ von RE_i gleich „Masse“ von RE_i).

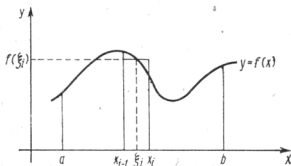


Bild 10.30

Nunmehr denken wir uns jeden Streifen ST_i ($i = 1, 2, \dots, n$) durch einen Massenpunkt P_i von der Masse $m(RE_i)$ am Ort des Schwerpunktes von RE_i ersetzt: P_i hat die Koordinaten $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\xi_i, \frac{1}{2}f(\xi_i))$ und die Masse $m_i = \rho \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Dadurch haben wir erreicht, daß der mit Masse belegte Bereich B durch ein System von Massenpunkten P_i ($i = 1, \dots, n$) mit den Koordinaten (\bar{x}_i, \bar{y}_i) und den Massen m_i ersetzt wird. (Bezüglich der Wirkungen der Schwerkraft wird sich dieses System von Massenpunkten ungefähr wie der mit Masse belegte Bereich B verhalten, falls die Zerlegung von $[a, b]$ hinreichend fein ist.) Den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) dieses Systems können wir nach den Formeln (**) berechnen.

$$\bar{x} = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^n m_i \bar{x}_i = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^n (\rho \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i) \cdot \xi_i = \frac{\rho}{M_0} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

($M_0 := m_1 + \dots + m_n$ ist die Gesamtmasse des Systems von Massenpunkten. Die Summation erstreckt sich immer über alle i von 1 bis n .)

$$\bar{y} = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^n (\varrho \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i) \cdot \frac{1}{2} f(\xi_i) = \frac{\varrho}{2 \cdot M_0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 \Delta x_i.$$

Da die Masse M_0 des Systems von Massenpunkten ungefähr gleich der Masse M des Bereiches B ist, können wir in diesen Gleichungen M_0 näherungsweise durch M ersetzen. Wegen $A \cdot \varrho = M$ („Flächeninhalt A von B “ mal „Dichte ϱ “ gleich „Masse von B “) gilt daher:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

$$\bar{y} \approx \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 \cdot \Delta x_i.$$

Der so ermittelte Punkt (\bar{x}, \bar{y}) ist eine Näherung für den gesuchten Schwerpunkt (x_S, y_S) des Bereiches B . Die Näherung ist um so genauer, je feiner die Zerlegung von $[a, b]$ ist. Den genauen Wert von x_S bzw. y_S erhält man wieder durch einen Grenzprozeß (vgl. 10.1.2.):

$$x_S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

$$y_S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i))^2 \cdot \Delta x_i.$$

Hieraus folgt (vgl. 10.1.2.) das

Ergebnis: Die Koordinaten des Schwerpunktes von B berechnet man mit Hilfe folgender Formeln:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) \, dx, \quad y_S = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Dabei ist $A = \int_a^b f(x) \, dx$ der Flächeninhalt des Bereiches B und B ein von den Kurven $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$) begrenzter Bereich, den man sich mit einer Massenbelegung der Dichte $\varrho = \text{const}$ versehen denkt. Im Falle $\varrho = \text{const}$ für alle Punkte von B nennt man B auch einen *homogenen Bereich* und den Schwerpunkt von B den *geometrischen Schwerpunkt* von B .

Hinweis: Die Formeln für x_S und y_S sind nicht symmetrisch in ihrer äußeren Form. Das liegt durchaus nicht in der Natur der Sache begründet! Für die Berechnung des Schwerpunktes eines ebenen Bereiches ist das sog. Bereichsintegral (Flächenintegral) das dem Problem angepaßte Hilfsmittel. In Band 5 werden wir ausführlicher auf die Begriffe „Schwerpunkt“, „statisches Moment“ und „Trägheitsmoment“ eingehen; dabei wird $\varrho = \text{const}$ nicht vorausgesetzt. Bei einer allgemeinen Beschreibung des Schwerpunktes durch *gewöhnliche* Integrale ist man jedoch zu dieser Annahme gezwungen.

Dritte Anwendung: Sind Spannung u und Stromstärke i konstant, d. h. $u = U = \text{const}$, $i = I = \text{const}$, so ist die in einer gewissen Zeit T geleistete *elektrische Arbeit* W ge-

geben durch:

$$W = U \cdot I \cdot T.$$

Wenn sich dagegen Spannung und Stromstärke zeitlich ändern, so wird die in der Zeit T geleistete Arbeit W durch ein bestimmtes Integral berechnet.

Ergebnis: Gilt für die Spannung $u = u(t)$ und für die Stromstärke $i = i(t)$, so ergibt sich für die im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ geleistete elektrische Arbeit

$$W = \int_0^T u i \, dt.$$

Bemerkung: Im Falle $u = U = \text{const}$, $i = I = \text{const}$ erhält man: $W = \int_0^T UI \, dt = UI \int_0^T dt = UIT$. $W = UIT$ ist also ein Spezialfall der allgemeinen Formel $W = \int_0^T u i \, dt$.

Bei der Herleitung dieser allgemeinen Formel benutzt man das gleiche Prinzip, wie bei der Herleitung der Formel für die mechanische Arbeit. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in endlich viele Teilintervalle zerlegt. Ist τ_k ein Punkt, Δt_k die Länge des k -ten Teilintervalls, so ist die Integralsumme $\sum_k u(\tau_k) i(\tau_k) \Delta t_k$ eine Näherung für die gesuchte elektrische Arbeit W . Den genauen Wert erhält man durch einen Grenzprozeß $\Delta t_k \rightarrow 0$ (vgl. Definition 10.2 in 10.1.2.):

$$W = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k u(\tau_k) i(\tau_k) \Delta t_k = \int_0^T u(t) i(t) \, dt.$$

Beispiel 10.20: Man berechne die elektrische Arbeit $W = \int_0^T u i \, dt$, wenn Spannung und Stromstärke den Gleichungen

$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u), \quad i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

genügen (Wechselstrom) und $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gewählt wird.

Hinweis: Bei ω , φ_u und φ_i handelt es sich um konstante Größen. ω ist die „Kreisfrequenz“, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die „Periode“. Wir berechnen also die elektrische Arbeit während einer Periode.

Durch die Substitution $x = \omega t + \varphi_u$ geht das Integral

$$W = \int_0^T \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \, dt$$

über in

$$W = \frac{1}{\omega} \hat{U} \hat{I} \int_{\varphi_u}^{\varphi_u + 2\pi} \sin x \sin(x + \varphi) \, dx.$$

Hierbei wurde zur Abkürzung $\varphi_i - \varphi_u = \varphi$ gesetzt (Phasenverschiebung). Da für eine periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π die Beziehung $\int_c^{c+2\pi} f(x) \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$ gilt, vereinfacht sich das Integral:

$$W = \frac{1}{\omega} \hat{U} \hat{I} \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x + \varphi) \, dx.$$

Wegen $\sin(x + \varphi) = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi$ ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\omega} \hat{U} \hat{I} \int_0^{2\pi} (\sin^2 x \cos \varphi + \sin x \cos x \sin \varphi) dx \\ &= \frac{1}{\omega} \hat{U} \hat{I} \left[(\cos \varphi) \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + (\sin \varphi) \frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega} \hat{U} \hat{I} \cos \varphi = \frac{T}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi_i - \varphi_u). \end{aligned}$$

Ergebnis: Für die elektrische Arbeit während einer Periode T gilt

$$W = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} T \cos(\varphi_i - \varphi_u).$$

Aufgabe 10.16: Man bestimme den geometrischen Schwerpunkt des von der Parabel $y = x^2$ ($x \geq 0$), der x -Achse und der Geraden $x = 4$ begrenzten Bereiches B . (B liegt ganz im 1. Quadranten.)

Aufgabe 10.17: Man bestimme den geometrischen Schwerpunkt des von den Kurven $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) und $y = 0$ begrenzten Bereiches B .

10.4.3. Ein Integralmodell in der Ökonomie¹⁾

Ein Betrieb A benötigt für seine Produktion ein Halbfabrikat, das im Betrieb B hergestellt wird. Der Jahresbedarf des Betriebes A an diesem Halbfabrikat betrage G Mengeneinheiten (z. B. 1 Mengeneinheit = 1000 Stück). Der Jahresbedarf soll durch n Lieferungen pro Jahr, die gleiche Zeitabstände $\frac{1}{n}$ und gleiche Liefermengen $\frac{G}{n}$ haben, abgedeckt werden. (Bei beispielsweise $n = 24$ Lieferungen pro Jahr müssen die Lieferungen im Zeitabstand $\frac{1}{24}$ Jahr erfolgen; die jeweilige Liefermenge beträgt $\frac{G}{24}$ Mengeneinheiten.) Es wird vorausgesetzt, daß der Lagerbestand zwischen zwei Lieferungen durch eine monoton fallende Funktion $b(t)$ beschrieben wird und bei einem Bestand von Null stets eine neue Lieferung erfolgt (s. Bild 10.31; die dort eingezeichnete Funktion $b(t)$ stellt natürlich eine gewisse mathematische Idealisierung dar, denn der Lagerbestand wird sich i. allg. sprunghaft ändern.) Die Transportkosten seien un-

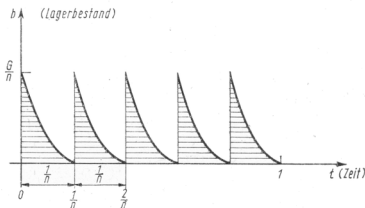


Bild 10.31

¹⁾ Das Beispiel wurde aus [3], Bd. I übernommen.

abhängig von der beförderten Liefermenge und betragen k_1 Geldeinheiten für jeden Transport von B nach A . Für die Lagerung des Halbfabrikates entstehen dem Betrieb A Lagerhaltungskosten in Höhe von k_2 Geldeinheiten pro Jahr und Mengeneinheit „durchschnittlicher“ Lagerbestand. Wie groß sind die Gesamtkosten K , die dem Betrieb A während eines Jahres hinsichtlich des Transportes und der Lagerung des Halbfabrikates entstehen?

Die Transportkosten betragen bei n Lieferungen nk_1 Geldeinheiten. Was hat man unter dem „durchschnittlichen“ Lagerbestand pro Jahr zu verstehen? Er ist gleich der Summe der Flächeninhalte aller in Bild 10.31 schraffiert eingezeichneten Bereiche, die nach Voraussetzung alle den gleichen Flächeninhalt haben, weil der Lagerbestand sich von Lieferung zu Lieferung immer nach demselben Gesetz ändern soll.

Für den Flächeninhalt des 1. Bereiches gilt: $\int_0^{\tau} b(t) dt \left(\tau = \frac{1}{n} \right)$. Der durchschnittliche Lagerbestand ist dann $n \cdot \int_0^{\tau} b(t) dt$. Für die Gesamtkosten erhält man:

$$K = k_1 n + k_2 n \int_0^{\tau} b(t) dt = \frac{1}{\tau} \left(k_1 + k_2 \int_0^{\tau} b(t) dt \right).$$

Bei dem hier formulierten Problem sind also die Gesamtkosten K eine Funktion von n : $K = K(n)$. Das heißt: Die Gesamtkosten sind nur abhängig von der Zahl der Lieferungen.

10.5. Einige Ergänzungen zum Integralbegriff

10.5.1. Das bestimmte Integral und der Maßbegriff

In 10.1.2. hatten wir als erste Anwendung des bestimmten Integrals den Flächeninhalt eines ebenen Bereichs (begrenzt durch die Kurven $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ (≥ 0)) berechnet. Dabei wurde der Begriff des Flächeninhalts als anschaulich gegeben hingenommen, obwohl dieser Begriff kein elementarer Begriff ist und zu seiner strengen Erfassung ein Grenzprozeß erforderlich ist. Selbst bei einem so einfachen geometrischen Gebilde, wie dem Kreis vom Radius r , ist die Berechnung des Flächeninhalts A nicht „elementar“, obwohl ihn jeder Schüler nach der Formel $A = \pi r^2$ (näherungsweise!) berechnen kann. (Der Grenzprozeß ist in der irrationalen Zahl π versteckt!) Es erhebt sich allgemein die Frage: Was soll man unter dem Inhalt (= Maß)¹⁾ einer beliebig vorgegebenen ebenen Punktmenge M verstehen und wie kann man denselben berechnen? Dabei muß natürlich gewährleistet sein, daß der eingeführte Inhaltsbegriff im Falle elementarer Figuren (Rechteck, Dreieck usw.) mit dem dort bereits gegebenen Inhaltsbegriff übereinstimmt. Ausgangspunkt ist ein Rechteck, dem als Maß das Produkt ab seiner Kantenlängen zugeordnet wird. Die folgende Konstruktion führt zum Maß der ebenen Punktmenge M (über M wird lediglich vorausgesetzt, daß es sich um eine beschränkte ebene Punktmenge handelt, d. h.,

¹⁾ In der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie ist die wesentliche Forderung, die man an den Maßbegriff stellt, daß die Vereinigung von abzählbar vielen meßbaren Mengen wieder eine meßbare Menge ist. Diese Forderung ist beim Lebesgue-Maß erfüllt, aber nicht beim Riemann-Maß. Im Sinne dieses allgemeinen abstrakten Maßbegriffes dürfte also das Wort „Maß“ beim Riemann-Inhalt (Riemann-Maß) nicht verwendet werden.

es existiert ein Kreis, so daß M ganz innerhalb dieses Kreises liegt): In der Ebene, in der M liegt, wird ein rechtwinklig kartesisches x, y -Koordinatensystem eingeführt. Wir führen jetzt eine Folge von „Quadratnetzen“ N_0, N_1, N_2, \dots ein (s. Bild 10.32). Das Quadratnetz N_0 besteht aus Quadraten mit der Kantenlänge 1. N_1 entsteht aus N_0 durch Halbierung der Kantenlänge von N_0 ; N_1 besteht aus Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{2}$. N_2 entsteht aus N_1 durch Halbierung der Kantenlänge von N_1 ; N_2 besteht also aus Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{4}$ ($= \frac{1}{2^2}$). Allgemein: Das Quadratnetz N_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) besteht aus Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$.

E_k sei die Vereinigung aller zu N_k gehörigen Quadrate, die ganz in M enthalten sind. U_k sei die Vereinigung aller zu N_k gehörigen Quadrate, die mindestens einen Punkt von M enthalten (s. Bild 10.33). Mit $m(E_k)$ bzw. $m(U_k)$ wird das Maß von E_k bzw. U_k bezeichnet. [$m(E_k)$ = Summe der Maße aller zu E_k gehörigen Quadrate; analog $m(U_k)$.] Beim Übergang von E_k zu E_{k+1} stellt man fest (s. Bild 10.32): $E_k \subset E_{k+1}$. Hieraus folgt $m(E_k) \leq m(E_{k+1})$. Die Folge $m(E_0), m(E_1), m(E_2), \dots$ ist also eine monoton wachsende und beschränkte (weil M beschränkt) Folge. Aus diesem Grund ist die Folge $m(E_k)$ konvergent, d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$ existiert. Analog zeigt man, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} m(U_k)$ existiert ($U_k \supset U_{k+1}$).

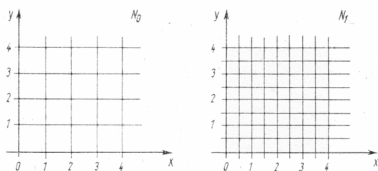


Bild 10.32

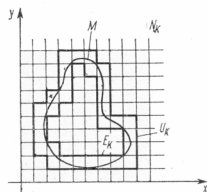


Bild 10.33

Definition 10.4: $m_i(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$ nennt man das **innere Maß** von M .

D. 10.4

$m_a(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} m(U_k)$ nennt man das **äußere Maß** von M .

Die Menge M heißt **Riemann-meßbar** (R -meßbar), wenn $m_i(M) = m_a(M)$ gilt. Den gemeinsamen Wert von $m_i(M) = m_a(M) =: m(M)$ nennt man das **Riemann-Maß** oder den **Riemann-Inhalt** von M . (An Stelle vom Riemann-Maß spricht man auch vom **Peano-Jordan-Maß**¹⁾ (J -Maß). Auf Peano und Jordan geht der in dieser Definition eingeführte Maßbegriff zurück (1890).)

Bemerkung: $m_i(M)$ ist die obere Grenze der Maße aller „einschriebenen“ E_k ; $m_a(M)$ ist die untere Grenze der Maße aller „umschriebenen“ U_k . Mit der Folge $m(E_0), m(E_1), m(E_2), \dots$ nähert man sich dem gesuchten Maß „von innen“; mit der Folge $m(U_0), m(U_1), m(U_2), \dots$ nähert man sich dem gesuchten Maß „von außen“. $m_i(M) = \sup m(E_k)$; $m_a(M) = \inf m(U_k)$. (Supremum = obere Grenze, Infimum = untere Grenze.)

¹⁾ Giuseppe Peano (1858–1932). Camille Jordan (1838–1922).

Zwischen dem bestimmten Riemannschen Integral und dem Riemannschen (Peano-Jordanschen) Inhalt besteht ein sehr enger Zusammenhang. Über diesen Zusammenhang gibt der folgende Satz Auskunft.

S. 10.23 Satz 10.23: Ist $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ definiert, beschränkt und nicht negativ, so gilt für die sogenannte **Ordinatenmenge** M , d. h. die Menge aller Punkte (x, y) mit $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, die folgende Aussage (s. Bild 10.3 in 10.1.2.): Die Ordinatenmenge M ist genau dann R-meßbar, wenn $f(x)$ über $[a, b]$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Ist diese Aussage erfüllt, so gilt

$$m(M) = \int_a^b f(x) dx,$$

d. h., das Riemann-Maß der Ordinatenmenge M ist gleich dem Riemannschen Integral von $f(x)$ über $[a, b]$. (Die zu $y = f(x)$, $I = [a, b]$ gehörige Ordinatenmenge soll mit $O(I, f)$ bezeichnet werden.)

Einen Beweis zu diesem Satz findet man z. B. in [10], Bd. III.

Bemerkung: Wir haben in diesem Abschnitt definiert, was man unter dem (Riemannschen) Inhalt einer ebenen Punktmenge zu verstehen hat. Diese Ausführungen kann man sofort auf eine Punktmenge des Raumes übertragen. An Stelle von Quadrat, netzen ($n = 2$) hat man Würfelnetze ($n = 3$). Darüber hinaus kann man natürlich die Problematik auf eine beliebige beschränkte Teilmenge M des n -dimensionalen Raumes R^n übertragen. (Über Riemann-meßbare Mengen im R^n siehe z. B. [14], Bd. II.)

10.5.2. Andere Integralbegriffe

Neben dem Riemannschen Integralbegriff gibt es noch eine Reihe anderer Integralbegriffe, die eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integralbegriffes darstellen und vor allem für tiefergehende theoretische Untersuchungen dem Riemannschen Integralbegriff überlegen sind.

Wir nennen hier das *Lebesguesche Integral*¹⁾ und das *Stieltjes-Integral*²⁾, wobei bei dem Stieltjes-Integral noch zwischen dem Riemann-Stieltjes-Integral und dem Lebesgue-Stieltjes-Integral unterschieden wird. (Das Lebesguesche Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals, das Lebesgue-Stieltjes-Integral eine Verallgemeinerung des Riemann-Stieltjes-Integrals.) Ausgangspunkt für das Lebesguesche Integral ist das *Lebesguesche Maß* (L -Maß) einer Menge M . Im Unterschied zum Riemann-Maß werden z. B. bei der Einführung des äußeren L -Maßes μ^* von M für die Überdeckung von M abzählbar viele Rechtecke zugelassen. Beim Riemann-Maß werden bei der Überdeckung nur endlich viele Rechtecke zugelassen (s. Bild 10.33! U_k mit seinen endlich vielen Rechtecken (Quadraten) $R_1^{(k)}, R_2^{(k)}, \dots, R_{n_k}^{(k)}$ bildet eine Überdeckung von M : $M \subset U_k = \bigcup_i R_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n_k$.)

Ansonsten geht man bei der Einführung des L -Maßes ähnlich vor, wie bei der Einführung des R -Maßes. Dabei wird allerdings – um gewissen Schwierigkeiten bei der Einbeziehung unbeschränkter Mengen aus dem Wege zu gehen – i. allg. das innere L -Maß μ_* mit Hilfe des äußeren L -Maßes definiert. Stimmen äußeres und inneres

¹⁾ Henri Lebesgue (1875–1941).

²⁾ Thomas Jean Stieltjes (1856–1894).

L -Maß von M überein, d. h. $\mu_*(M) = \mu^*(M)$, so heißt M *Lebesgue-meßbar* (L -meßbar) und der gemeinsame Wert $\mu(M) := \mu^*(M) = \mu_*(M)$ das *Lebesgue-Maß* (L -Maß) von M . Nähere Einzelheiten über das Lebesguesche Maß findet man z. B. in [9] und [12]. Als eine besonders wichtige Eigenschaft des L -Maßes erwähnen wir hier noch:

Satz 10.24: Jede R -meßbare Menge ist auch L -meßbar. (Die Umkehrung gilt natürlich S. 10.24 i. allg. nicht.)

Wir kommen nun zum Lebesgueschen Integralbegriff. In Satz 10.23 konnten wir feststellen: Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte nichtnegative Funktion, so kann man das Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ als Riemann-Maß der zu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gehörigen Ordinatenmenge ansehen. Hiervon ausgehend definiert man:

Definition 10.5: $y = f(x)$ sei eine auf $[a, b]$ definierte nichtnegative Funktion. Wenn die zu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gehörige Ordinatenmenge $O(I, f)$ L -meßbar ist, so heißt die Funktion $f(x)$ über $I = [a, b]$ **Lebesgue-integrierbar** (L -integrierbar). Das L -Maß der Ordinatenmenge heißt das **Lebesgue-Integral** (L -Integral) und wird mit **D. 10.5**

$${}^{(L)}\int_a^b f(x) dx \quad \text{oder} \quad {}^{(L)}\int_I f(x) dx$$

bezeichnet. Es gilt also:

$${}^{(L)}\int_I f(x) dx = \mu[O(I, f)].$$

(Der Buchstabe L wurde angefügt, um eine Verwechslung mit dem R -Integral zu vermeiden.)

Ist die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ nicht erfüllt, so betrachtet man die nichtnegativen Funktionen

$$f^+(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \quad \text{und} \quad f^-(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$$

(s. Bild 10.34).

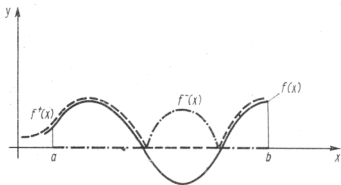


Bild 10.34

Definition 10.6:

D. 10.6

$${}^{(L)}\int_I f(x) dx := {}^{(L)}\int_I f^+(x) dx - {}^{(L)}\int_I f^-(x) dx.$$

(Vor.: Die rechts stehenden L -Integrale existieren und sind endlich.)

Bemerkung: Wir haben hier das Lebesgue-Integral nur für Funktionen einer Veränderlichen definiert. Die Verallgemeinerung auf mehrdimensionale Integrationsbereiche bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten (s. [12]).

In Analogie zum Satz 10.24 gilt

S. 10.25 Satz 10.25: *Jede R-integrierbare Funktion ist auch L-integrierbar.*

Zum Abschluß unserer Betrachtungen geben wir die Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals an. Bei der Einführung des Riemann-Integrals $\int_a^b f(x) dx$ gingen wir von Integralsummen der Form

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

aus. Das Riemann-Integral (*R-Integral*) ergibt sich dann als Grenzwert einer Folge von Integralsummen (s. 10.1.1. und 10.1.2.). Beim Riemann-Stieltjes-Integral (*R-S-Integral*) geht man im Prinzip genauso vor. Der wesentliche Unterschied zwischen *R-Integral* und *R-S-Integral* besteht darin, daß man an Stelle der Längen $x_i - x_{i-1}$ mit Hilfe einer weiteren Funktion $\varphi(x)$ die Differenzen $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})$ betrachtet. Durch eine auf $[a, b]$ monoton wachsende Funktion $\varphi(x)$ wird jedes Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ mit der Länge $x_i - x_{i-1}$ in ein Intervall $[\varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i)]$ mit der Länge $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})$ abgebildet. Beispielsweise wird das Intervall $[2, 4]$ mit der Länge 2 durch die Funktion $\varphi(x) = x^2$ auf das Intervall $[4, 16]$ mit der Länge 12 abgebildet. Da durch eine solche Funktion $\varphi(x)$ eine „Längenverzerrung“ der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ von $[a, b]$ erfolgt, nennt man in diesem Zusammenhang $\varphi(x)$ auch „*Verzerrungsfunktion*“.

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir nun die genaue Definition des *R-S-Integrals* angeben.

D. 10.7 Definition 10.7: $f(x)$ sei eine auf $[a, b]$ stetige Funktion, $\varphi(x)$ sei monoton wachsend auf $[a, b]$. (Die Stetigkeit von $\varphi(x)$ wird nicht vorausgesetzt!) Zu jeder Zerlegung Z

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

von $[a, b]$ mit den Zwischenpunkten ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bildet man die „*Stieltjes-Summe*“

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =: S^*(Z).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen für f und φ existiert für jede Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen Z_1, Z_2, \dots der Grenzwert $\lim S^*(Z_\nu)$, und zwar unabhängig von der Wahl der Folge unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen und der Zwischenpunkte ξ_i . Diesen Grenzwert nennt man das **Riemann-Stieltjes-Integral der Funktion $f(x)$ über $[a, b]$ bezüglich $\varphi(x)$** und bezeichnet ihn mit dem Symbol

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

Merkregel:

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})).$$

Bemerkungen zum R-S-Integral:

- a) Im Falle $\varphi(x) = x$ stimmt das R - S -Integral mit dem R -Integral überein.
- b) Ist die Verzerrungsfunktion $\varphi(x)$ stetig differenzierbar, so läßt sich das R - S -Integral durch ein R -Integral berechnen; es gilt:

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) dx.$$

- c) Eine wichtige Anwendung findet das R - S -Integral in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ist X eine beliebige Zufallsgröße, $F(x)$ die zu X gehörige Verteilungsfunktion, so gilt für den Erwartungswert von X die Beziehung

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Der Erwartungswert läßt sich also durch ein R - S -Integral mit $f(x) = x$ und $\varphi(x) = F(x)$ darstellen. Ist X eine stetig verteilte Zufallsgröße, so kann man $E(X)$ durch ein R -Integral darstellen.

11. Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des bestimmten (Riemannschen) Integrals $\int_a^b f(x) dx$ wurde vorausgesetzt:

1. Das Intervall $[a, b]$ ist endlich,
2. die Funktion $f(x)$ ist auf $[a, b]$ beschränkt.

(Bei der Einführung der Integralsummen (s. 10.1.1.) hatten wir lediglich formuliert, daß die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Dabei wurde als Selbstverständlichkeit angesehen, daß es sich bei $[a, b]$ um ein endliches Intervall handelt und $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt ist. Das gesamte Vorgehen in 10.1.1. und 10.1.2. baut auf dieser Vorstellung auf!)

Ist eine der Voraussetzungen nicht erfüllt (z. B. „ $a = 1, b = \infty, f(x)$ beliebig“ oder „ $a = 0, b = 4, f(x) = \frac{1}{x}$ “), kann man versuchen, durch einen geeigneten Grenzprozeß dem Integral einen vernünftigen Sinn zu geben. Existiert bei diesem Grenzprozeß der Grenzwert, so spricht man von einem „uneigentlichen Integral mit unendlichen Grenzen“ (im 1. Falle) bzw. „mit nichtbeschränkter Funktion“ (im 2. Falle). Natürlich ist auch eine Kombination der beiden Fälle möglich, d. h., Integrationsintervall und Integrand sind nicht beschränkt.

11.1. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

11.1.1. Definition und Berechnung uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen

Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen treten uns in folgenden drei Formen entgegen:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{(I)}, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{(II)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{(III)}.$$

Was verbirgt sich hinter diesen bisher nicht definierten Größen? (Voraussetzung: a, b reelle (endliche) Zahlen; $\infty = +\infty$.)

D.11.1 Definition 11.1:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Das uneigentliche Integral ist der Grenzwert eines eigentlichen Integrals.

(Vorausgesetzt wird hierbei natürlich, daß die Funktion $f(x)$ auf jedem endlichen Teilintervall $[a, b]$ integrierbar ist (s. Definition 10.2 in 10.1.2.) und der Grenzwert $G = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert). Dieser Grenzwert heißt *uneigentliches Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, \infty)$* und wird durch das Symbol $\int_a^{\infty} f(x) dx$ bezeichnet. In diesem Zusammenhang sind folgende Sprechweisen üblich: Wenn der Grenzwert G

existiert und endlich ist, so sagt man, das uneigentliche Integral *existiert* bzw. *konvergiert*. Existiert G nicht, so spricht man von einem *divergenten* uneigentlichen Integral; hierzu zählen auch die Fälle $G = \infty$ und $G = -\infty$.

Definition 11.2:**D. 11.2**

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

(Voraussetzungen und Bezeichnungen analog Def. 11.1)

Definition 11.3:**D. 11.3**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

(c : beliebige reelle Zahl).

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die rechts stehenden uneigentlichen Integrale (die zu den in Def. 11.1 und 11.2 eingeführten Typen gehören) existieren. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Zahl c . (Bei der Berechnung eines konkreten Beispiels kann man z. B. $c = 0$ wählen.)

Beweis: Ist c_1 ein von c verschiedener Wert, etwa $c_1 > c$, so folgt aus der Existenz der uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ und $\int_c^{\infty} f(x) dx$ die Existenz der eigentlichen bzw. uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{c_1} f(x) dx$, $\int_c^{c_1} f(x) dx$ und $\int_{c_1}^{\infty} f(x) dx$, wie man mit Hilfe von Satz 10.3 in 10.1.4. und den Definitionen 11.1 und 11.2 beweisen kann, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß Definition 11.3 unabhängig von der Wahl der Zahl c ist. ■

Hinweis: An Stelle von Definition 11.3 kann man auch wie folgt definieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Der rechts stehende Limes ist allerdings bisher nicht genau definiert worden, und wir wollen das an dieser Stelle auch nicht tun. Das Wesentliche ist, daß die Zahlen a und b unabhängig voneinander gegen $-\infty$ bzw. ∞ streben.

Bei der Berechnung von $\int_a^{\infty} f(x) dx$ geht man i. allg. folgendermaßen vor. Man bestimmt zunächst eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, berechnet anschließend $\int_a^b f(x) dx$

= $F(b) - F(a)$ und führt zum Schluß den Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ durch:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) = F(\infty) - F(a) = F(x)|_a^\infty.$$

Dabei ist $F(\infty)$ eine abkürzende Schreibweise für $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$.

Analog geht man bei den in den Definitionen 11.2 und 11.3 angegebenen uneigentlichen Integralen vor. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^b,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = F(\infty) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^\infty$$

$$(F(-\infty) := \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)).$$

Beispiel 11.1: Man untersuche, ob das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ existiert (konvergiert) oder nicht. Es gilt:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Ergebnis: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ (konvergiert).

Geometrisch kann das Ergebnis wie folgt interpretiert werden: Der Flächeninhalt des zwischen der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \leq x < \infty$, und der x -Achse liegenden Bereiches (s. Bild 11.1) ist gleich 1.

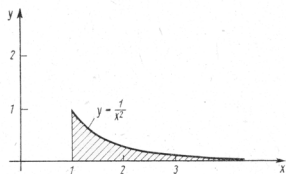


Bild 11.1

Beispiel 11.2: $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |x| \Big|_1^b) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$

Ergebnis: $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ (divergent).

Beispiel 11.3: Man untersuche, für welche Werte α (α beliebige reelle Zahl) das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert und für welche es divergiert.

Wir haben in den vorhergehenden Beispielen festgestellt, daß das Integral für $\alpha = 2$ konvergiert und für $\alpha = 1$ divergiert. Wir betrachten jetzt ein beliebiges $\alpha \neq 1$. Es gilt (s. Formel (9.1) in 9.1.2.):

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(Im Falle $\alpha < 1$ ist $1 - \alpha > 0$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = \infty$; im Falle $\alpha > 1$ ist $1 - \alpha < 0$, $\alpha - 1 > 0$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} \left(= \frac{1}{\infty} \right) = 0$.)

Ergebnis: Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leq 1$. Für $\alpha > 1$ gilt:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Das Konvergenzverhalten des Integrals ändert sich nicht, wenn für die untere Integrationsgrenze eine Zahl $a > 0$ gewählt wird.

Merkregel:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1, \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1, \end{cases} \quad \text{Voraussetzung: } a > 0.$$

$$\text{Beispiel 11.4: } \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = 1$$

$$\left(\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^a} \left(= \frac{1}{\infty} \right) = 0 \right).$$

Geometrische Interpretation: Der Flächeninhalt des zwischen der Kurve $y = e^x$, $-\infty < x \leq 0$, und der x -Achse liegenden Bereiches (s. Bild 11.2) ist gleich 1.

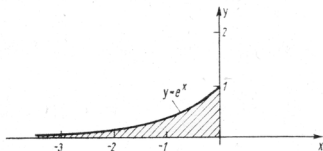


Bild 11.2

Beispiel 11.5: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (s. Def. 11.3).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctan x \Big|_a^0 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

(Nach Definition von $y = \arctan x$ gilt: $\arctan 0 = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.) Für das zweite Integral erhält man ebenfalls den Wert $\frac{\pi}{2}$, eine Tatsache, die aus Symmetriegründen unmittelbar einleuchtend ist. Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x , d. h., die Kurve liegt symmetrisch zur y -Achse.

Damit haben wir folgendes Ergebnis: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$. Geometrische Interpretation: Der Flächeninhalt des zwischen der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$, und der x -Achse liegenden Bereiches B (s. Bild 11.3) ist gleich π . B hat also den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreis vom Radius 1.

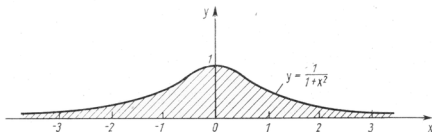


Bild 11.3

Hinweis: Die Kurve $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hat äußerlich fast das gleiche Aussehen wie die sog. *Glockenkurve* (*Gaußsche Fehlerkurve*), welche in ihrer einfachsten Form durch $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ beschrieben wird. $\varphi(x)$ hat ebenfalls bei $x = 0$ ein Maximum und das gleiche Verhalten im Unendlichen wie $f(x)$, d. h. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. Für $\varphi(x)$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, was allerdings nicht so einfach nachzuweisen ist wie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi$. Die Glockenkurve nimmt eine zentrale Stellung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein (vgl. hierzu auch Aufgabe 7.14).

Beispiel 11.6: Zwischen den Massenpunkten P_0 und P mit den Massen m und M , deren Abstand r beträgt, wirkt eine Anziehungskraft vom Betrage $F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}$ (Newtonsches Gravitationsgesetz; γ Gravitationskonstante). Für die Kraft \mathbf{F} , mit der die (frei beweglich gedachte) Masse M von der (an einem Punkt festgehaltenen)

Masse m angezogen wird, gilt: $F = \gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$, wobei $\mathbf{r} = \overrightarrow{PP_0}$ der Vektor von P nach P_0 ist.

Man denke sich auf der x -Achse im Nullpunkt eine Masse m angebracht; im Punkt mit der Koordinate $x = r > 0$ befinde sich ein Massenpunkt mit der Masse $M = 1$ (s. Bild 11.4). Für die Kraft $F(x)$ (Betrag $F(x)$), mit der M von m angezogen wird, gilt: $F(x) = \gamma \frac{m}{x^2}$. Wie groß ist bei dieser Kraft die Arbeit W , die geleistet werden muß, um die Masse $M = 1$ aus der Lage $x = r$ ins Unendliche zu bringen ($x \rightarrow \infty$)?



Bild 11.4

Nach Satz 10.20 in 10.4.2. gilt: $W = - \int_r^\infty F(x) dx$. (Das negative Vorzeichen wird gewählt, weil die Kraft $F(x)$ entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung $x \rightarrow \infty$ wirkt.)

$$\text{Hieraus folgt: } W = - \int_r^\infty \gamma \frac{m}{x^2} dx = -\gamma m \left[-\frac{1}{x} \right]_r^\infty = -\gamma \cdot \frac{m}{r}.$$

Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale (falls sie existieren):

$$\text{Aufgabe 11.1: } \int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (\text{Vor.: } a \neq 0). \quad *$$

$$\text{Aufgabe 11.2: } \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-2x} dx. \quad *$$

$$\text{Aufgabe 11.3: } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}. \quad *$$

$$\text{Aufgabe 11.4: } \int_{-\infty}^0 \sin x dx. \quad *$$

11.1.2. Cauchyscher Hauptwert

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ war wie folgt definiert:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Hierbei war wesentlich, daß die Integrationsgrenzen a und b unabhängig voneinander gegen $-\infty$ bzw. ∞ gehen. Würde man z. B. $a = -3b$ wählen, so wären a und b voneinander abhängig; mit $b \rightarrow \infty$ würde dann automatisch $a \rightarrow -\infty$ streben. Wählt man $a = -b$, so gelangt man zum sog. Cauchyschen Hauptwert des uneigentlichen Integrals.

D. 11.4 Definition 11.4: Unter dem **Cauchyschen Hauptwert** des uneigentlichen Integrals der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $(-\infty, \infty)$ versteht man den Grenzwert $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) dx$. Dieser Grenzwert wird – falls er existiert – durch das Symbol $\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ bezeichnet.

Aus Definition 11.3 folgt sofort, daß aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes $\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ folgt und die beiden Integrale gleich sind. Die Umkehrung gilt i. allg. nicht, d. h.: Die Existenz von $\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ hat nicht automatisch die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ zur Folge. Das folgende Beispiel demonstriert diesen Sachverhalt.

Beispiel 11.7: Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3}$ existiert nicht, aber der Cauchysche Hauptwert dieses uneigentlichen Integrals $\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3}$ existiert.

Aus

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 3} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |\varphi(x)| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3) + c \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{x dx}{x^2 + 3} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln (\omega^2 + 3) - \frac{1}{2} \ln ((-\omega)^2 + 3) \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Der Cauchysche Hauptwert des uneigentlichen Integrals existiert; es gilt: $\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3} = 0$. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3}$ dagegen existiert nicht. Nach Definition 11.3 müßten die uneigentlichen Integrale von $-\infty$ bis 0 und 0 bis ∞ existieren ($c = 0!$). Diese existieren aber beide nicht:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 3} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln (a^2 + 3) = -\infty; \\ \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3} &= \infty. \end{aligned}$$

Hinweis: Man hüte sich vor dem Schluß „ $-\infty + \infty = 0$ “! Die Rechenregel

$$\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x) \quad (*)$$

ist immer „von rechts nach links“ zu lesen, d. h.: Wenn $\lim f(x)$ und $\lim g(x)$ existieren, so existiert auch $\lim (f(x) + g(x))$, und es gilt die Gleichung (*). Die Rechenregel (*) kann auch auf die Fälle $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$ bzw. $-\infty$ ausgedehnt werden, aber nicht auf den Fall „ $\lim f(x) = \infty$ und $\lim g(x) = -\infty$ “ bzw. umgekehrt.

Aufgabe 11.5: Man untersuche, ob $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$ bzw. CH $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$ existiert. *

11.1.3. Existenzkriterien (Konvergenzkriterien) für uneigentliche Integrale

Von den in den Definitionen 11.1, 11.2 und 11.3 eingeführten drei Typen von uneigentlichen Integralen betrachten wir hier nur den in Definition 11.1 eingeführten

Typ: $\int_a^{\infty} f(x) dx$. Die beiden anderen Typen lassen sich auf diesen Typ zurückführen.

(Für den in Definition 11.2 eingeführten Typ gilt $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \int_{-b}^{\infty} f(-x) dx$. Bei uneigentlichen Integralen des in Definition 11.3 eingeführten Typs ist unmittelbar klar, daß sie durch uneigentliche Integrale der in Definition 11.1 bzw. Definition 11.2 eingeführten Typen ausgedrückt werden können.)

Die Frage nach der Existenz (Konvergenz) des uneigentlichen Integrals $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ist im allgemeinen schnell beantwortet, wenn von der Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt ist. Es gilt nämlich $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(a)$, und damit ist die Frage nach der Existenz des uneigentlichen Integrals zurückgeführt auf die Frage, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ existiert.

Die in den folgenden Sätzen formulierten Existenzkriterien gestatten ein Herangehen an die Frage nach der Existenz uneigentlicher Integrale auch in den Fällen, bei denen von der Funktion $f(x)$ keine Stammfunktion $F(x)$ bekannt ist.

Satz 11.1 (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale): Ist die Funktion $f(x)$ für alle $x \geq a$ (a fest) nichtnegativ und gilt für eine weitere Funktion $g(x)$ die Ungleichung $0 \leq f(x) \leq g(x)$ (s. Bild 11.5), so folgt aus der Existenz von $\int_a^{\infty} g(x)$ die Existenz von $\int_a^{\infty} f(x) dx$; hierbei ist $\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$. (Vor.: $f(x)$ ist auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$ stückweise stetig.) S. 11.1

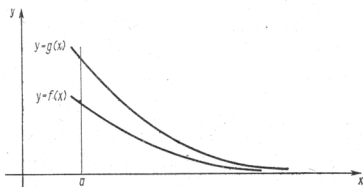


Bild 11.5

Auf den Beweis des Satzes verzichten wir, zumal die Aussage des Satzes vom geometrisch-anschaulichen Standpunkt fast selbstverständlich erscheint. $\int_a^\infty g(x) dx$ kann geometrisch als Flächeninhalt A_1 des zwischen der Kurve $y = g(x)$, $a \leq x \leq \infty$, und der x -Achse liegenden Bereiches gedeutet werden. Nach Voraussetzung muß A_1 existieren und endlich sein. Da $g(x)$ eine „Oberfunktion“ (Majorante) von $f(x)$ ist, d. h. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$, ist zu erwarten, daß auch der Flächeninhalt A_2 des zwischen $y = f(x)$, $a \leq x < \infty$, und der x -Achse liegenden Bereiches existiert und der Ungleichung $0 \leq A_2 \leq A_1$ genügt

$$\left(A_2 = \int_a^\infty f(x) dx, A_1 = \int_a^\infty g(x) dx \right).$$

Ergänzung zum Satz 11.1: Es ist nicht erforderlich, daß die Voraussetzung $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ gilt; der Satz bleibt wegen

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx \quad (b > a)$$

auch dann richtig, wenn $f(x) \leq g(x)$ nur für alle $x \geq b$ gilt, wobei b eine beliebige, rechts von a liegende Zahl ist. (Es könnte z. B. $a = 1$ und $b = 20$ sein!)

Bedeutung des Satzes 11.1: Wenn man wissen möchte, ob das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ ($f(x) \geq 0$) existiert, aber keine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ bekannt ist, so kann man versuchen, eine „Oberfunktion“ $g(x)$ von $f(x)$ so zu bestimmen, daß das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x) dx$ existiert. Zu einer vorgegebenen Funktion $f(x) \geq 0$ gibt es natürlich immer unendlich viele Funktionen $g(x)$ mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Die Kunst besteht darin, eine nicht zu große Majorante $g(x)$ zu finden, d. h. eine Funktion $g(x)$, für die einerseits $f(x) \leq g(x)$ gilt, die aber andererseits noch so beschaffen ist, daß das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x) dx$ existiert (konvergiert).

Beispiel 11.8: Man untersuche mit Hilfe von Satz 11.1, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + e^x} \text{ existiert.}$$

Wegen $e^x > 0$ für alle x gilt $x^2 + e^x > x^2$. Hieraus folgt: $\frac{1}{x^2 + e^x} < \frac{1}{x^2}$. Die Funktion $g(x) := \frac{1}{x^2}$ ist also eine „Oberfunktion“ der Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2 + e^x}$.

Da nach Beispiel 11.1 das uneigentliche Integral $\int_1^\infty g(x) dx$ existiert (und den Wert 1 hat), muß nach Satz 11.1 auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + e^x}$ existieren und einen Wert haben, der kleiner als 1 ist.

Hinweis: Mit Hilfe des Majorantenkriteriums kann man nur entscheiden, ob das vorgegebene uneigentliche Integral existiert – die Berechnung mit Hilfe dieses Kriteriums ist nicht möglich.

Satz 11.2 (Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale): Ist $\int_a^\infty g(x) dx$ ein divergentes uneigentliches Integral und gilt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$, so ist auch das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ divergent ($g(x)$ ist eine „Unterfunktion“ (Minorante) von $f(x)$). S. 11.2

Auch die Aussage dieses Satzes ist vom geometrisch-anschaulichen Standpunkt unmittelbar einleuchtend.

Beispiel 11.9: $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x} + 5}{x} dx$ ist divergent.

Begründung: Es gilt $f(x) := \frac{\sqrt{x} + 5}{x} > \frac{\sqrt{x}}{x} =: g(x) > 0$ für alle $x \in [1, \infty)$.

Da $\int_1^\infty g(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ divergent ist (s. Beispiel 11.3), ist nach Satz 11.2 auch $\int_1^\infty f(x) dx$ divergent.

In den Sätzen 11.1 und 11.2 wurde vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ auf dem betrachteten Intervall $[a, \infty)$ nichtnegativ ist. Wenn $f(x)$ auch negative Werte annehmen kann, so betrachtet man zunächst die Funktion $|f(x)|$. Der folgende Satz gibt Auskunft über die Beziehung zwischen den zu $f(x)$ und $|f(x)|$ gehörigen uneigentlichen Integralen.

Satz 11.3: Wenn $\int_a^\infty |f(x)| dx$ existiert, dann existiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$. Man sagt dann, $\int_a^\infty f(x) dx$ ist **absolut konvergent**. S. 11.3

Aufgabe 11.6: Man untersuche, ob das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 e^x}$ existiert. *

11.2. Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkter Funktion

11.2.1. Definition und Berechnung

Wenn die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ eine Unbeschränktheitsstelle (Unendlichkeitsstelle oder Sprungstelle mit unendlichem Sprung) hat, d. h., wenigstens einer der Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ ist gleich $+\infty$ oder $-\infty$, so ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ bisher nicht erklärt.

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt z. B. einen unendlichen Sprung bei $x = 0$ ($c = 0$). Die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert, und es gilt: $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$ (s. Bild 11.6). Das Integral $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x}$ ist nicht erklärt, weil das Integra-

tionsintervall $[-2, 2]$ eine Sprungstelle mit unendlichem Sprung des Integranden $f(x) = \frac{1}{x}$ enthält. In einem solchen Falle wird man zunächst die Unbeschränktheitsstelle c isolieren, indem man eine kleine Umgebung $[c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_2]$ aus dem Integrationsintervall herausläßt, die Integration über die Teilintervalle $[a, c - \varepsilon_1]$ und $[c + \varepsilon_2, b]$ durchführt und schließlich untersucht, ob sich für $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ und $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ein endlicher Grenzwert ergibt. Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir nun zur Definition der uneigentlichen Integrale mit nicht beschränkter Funktion. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden:

$$c = a \quad (\text{I}), \quad a < c < b \quad (\text{II}), \quad c = b \quad (\text{III}).$$

(Die Unbeschränktheitsstelle c befindet sich im linken Eckpunkt (Fall I), im Innern (Fall II), im rechten Eckpunkt (Fall III) des Integrationsintervalls $[a, b]$.)

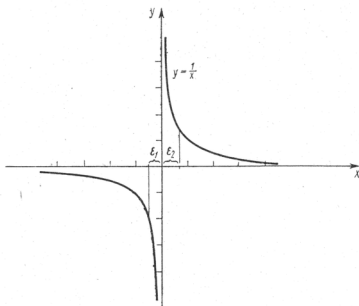


Bild 11.6

D. 11.5 Definition 11.5: Ist c eine Unbeschränktheitsstelle von $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$, so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad \text{falls } c = a,$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad \text{falls } c = b,$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx, \quad \text{falls } a < c < b,$$

(s. Bild 11.7) und nennt die auf diese Weise eingeführten Größen ebenfalls uneigentliche Integrale.

Voraussetzung ist natürlich, daß die auf der jeweils rechten Seite stehenden Grenzwerte existieren. Man spricht wieder von einem *konvergenten* bzw. *divergenten* uneigentlichen Integral, je nachdem, ob die entsprechenden Grenzwerte existieren oder nicht.

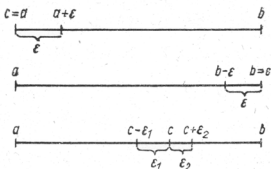


Bild 11.7

Beispiel 11.10: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ist ein uneigentliches Integral, denn die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ besitzt eine Unbeschränktheitsstelle bei $x = 0$. Das uneigentliche Integral existiert (konvergiert), wenn der Grenzwert $G = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ existiert (und endlich ist).

Aus $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$ folgt $G = 2$. Ergebnis: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$, d. h., das uneigentliche Integral existiert und hat den Wert 2. Geometrisch kann das Ergebnis wie folgt interpretiert werden: Der Flächeninhalt des zwischen der Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 \leq x \leq 1$, und der x -Achse liegenden Bereiches B ist gleich 2 (s. Bild 11.8).

Beispiel 11.11: Man untersuche, ob das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ konvergiert oder divergiert. (Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Unbeschränktheitsstelle; s. Bild 11.9)

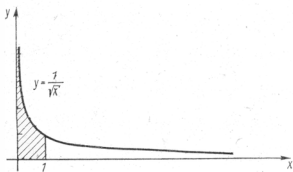


Bild 11.8

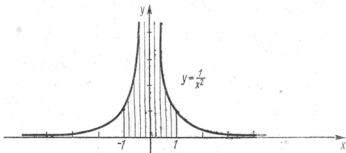


Bild 11.9

Nach Definition 11.5 gilt ($c = 0$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left\{ \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} \right\} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left\{ \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon_2}^1 \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right\} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left\{ -1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right\} = \infty + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Ergebnis: Das uneigentliche Integral divergiert.

Bemerkung: Die formale Rechnung (Nichtbeachtung der Unbeschränktheitsstelle im Innern des Integrationsintervalls) führt hier zu einem falschen Ergebnis.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

Ein Blick auf Bild 11.9 lehrt, daß das Ergebnis auf keinen Fall richtig sein kann. Der Flächeninhalt des zwischen der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, und der x -Achse liegenden Bereiches B kann niemals negativ sein!

Ergänzung zur Definition 11.5: Wenn die Funktion $f(x)$ mehrere Unbeschränktheitsstellen c_1, c_2, \dots im Intervall $[a, b]$ besitzt ($a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b$), so definiert man:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

Vorausgesetzt wird dabei natürlich, daß jedes der rechts stehenden uneigentlichen Integrale konvergiert. Das erste und das letzte Integral auf der rechten Seite gehören zu den in Definition 11.5 eingeführten Typen.

Bei den anderen Integralen hat man in beiden Randpunkten eine Unbeschränktheitsstelle. Diesen Typ eines uneigentlichen Integrals kann man sofort auf die bereits bekannten Typen zurückführen. Beim zweiten Integral definiert man:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = \int_{c_1}^c f(x) dx + \int_c^{c_2} f(x) dx,$$

wobei c irgendein Punkt aus dem Innern des Intervalls $[c_1, c_2]$ ist (die Definition ist natürlich unabhängig von der Wahl des Punktes c).

* **Aufgabe 11.7:** Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \text{c) } \int_0^1 \ln x dx, \quad \text{d) } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}.$$

11.2.2. Einige Ergänzungen

Analog wie bei uneigentlichen Integralen über dem Intervall $(-\infty, \infty)$ wird auch bei uneigentlichen Integralen über einem Intervall $[a, b]$ mit einer Unbeschränktheitsstelle c des Integranden im Innern des Intervalls ein Cauchyscher Hauptwert definiert.

D. 11.6 Definition 11.6: Die Funktion $f(x)$ habe bei $x = c$ ($a < c < b$) eine Unbeschränktheitsstelle. Unter dem **Cauchyschen Hauptwert** des uneigentlichen Integrals der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ versteht man den folgenden Grenzwert

$$\text{CH} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Bemerkungen zur Definition: Bei etwas oberflächlicher Betrachtungsweise kann der Eindruck entstehen, daß der Cauchysche Hauptwert mit dem 3. Typ des in Definition 11.5 eingeführten uneigentlichen Integrals übereinstimmt. An Stelle von Definition 11.5 (3. Typ) kann man genausogut schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (*)$$

$$(\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow a} \varphi(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow a} \varphi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow a} \varphi(\varepsilon_1)!!)$$

Wenn die auf der rechten Seite von (*) stehenden Grenzwerte existieren (und endlich sind), dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c+\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right], \quad (**)$$

und die rechte Seite von (*) stimmt mit (**) überein – aber umgekehrt kann man nicht schließen! (Siehe Hinweis im Anschluß an Beispiel 11.7.) Aus der Existenz des Grenzwertes (**) folgt i. allg. nicht die Existenz der auf der rechten Seite von (*) stehenden Grenzwerte. Anders ausgedrückt: Aus der Existenz des uneigentlichen Integrals (im Sinne von Definition 11.5, 3. Typ) folgt die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes (im Sinne von Definition 11.6), aber nicht umgekehrt.

Beispiel 11.12: Das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht (s. Aufgabe 11.7, b).

Der Cauchysche Hauptwert $\text{CH} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ aber existiert:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon] = 0.$$

Lösungen der Aufgaben

2.1.: a) Für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq 0$, $x_n \neq 1$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x_n + 2}{x_n - 1} = \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = -2.$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{x - 1} = -2.$$

b) Wegen

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2 \quad (x \neq -2)$$

erhält man (vgl. Beispiel 2.2)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4.$$

$$2.2: x_n = \frac{1}{n\pi} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$x_n = \frac{2}{(4n + 1)\pi} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

2.3: Wegen

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{für } x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gilt $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$, und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht.

2.4: Mit Satz 2.3 und (2.15) folgt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{k}{m}t} \right)^{-1} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}.$$

$$2.5: a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

c) 2 (vgl. Aufgabe 2.5b) und Beispiel 2.16).

d) Aus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 3} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x + 2}{x^2 + 3} > 0 \quad \text{für alle } x > -2$$

folgt mit Satz 2.4 die Aussage $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2} = +\infty$.

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$f) \text{ Wegen } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ für alle } x > 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ gilt } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ (s. Satz 2.5).}$$

$$2.6: \text{ Es sei } f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} \text{ mit } a_m \neq 0, b_n \neq 0, m < n. \text{ Dann ist}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}}$$

$$\text{und daher } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \frac{a_m}{b_n} = 0; \text{ analog für } x \rightarrow -\infty.$$

2.7: Es gibt eine punktierte Umgebung U von $x_0 = 0$ und eine positive Zahl m , so daß gilt

$$\left| \frac{\sin x - x}{x^3} \right| \leq m \text{ für alle } x \in U.$$

3.1: a) Für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0^2 = f(x_0)$. Daher ist f an jeder Stelle x_0 stetig.

b) Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$ (s. (2.28)) ist $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x = 0$ stetig.

c) Wegen $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0 = f(0)$ ist f an der Stelle $x = 0$ rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.

d) Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, dann gilt

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - 0| = |x| < \delta$, falls $\delta = \varepsilon$ gesetzt wird. Nach Satz 3.1 ist f an der Stelle $x = 0$ stetig.

Es gilt also $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

3.2: a) Wegen $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1, \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$ hat $\operatorname{sgn} x$ bei $x = 0$ einen endlichen Sprung.

b) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$ ($x \neq -1$) hat bei $x = -1$ eine Lücke, die eine hebbare Unstetigkeitsstelle ist; $f^*(x) = x - 1$ ($-\infty < x < +\infty$).

c) Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$ ist $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle von f :

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

d) f hat bei $x = 3$ eine Lücke und verhält sich dort wegen $f(x) = -\frac{1}{(x-3)^4}$ ($x \neq 3$) wie an einer Polstelle 4. Ordnung (Unendlichkeitsstelle, wobei $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$).

e) Wegen $\lim_{x \rightarrow -0} \cot x = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \cot x = +\infty$ (s. Satz 2.4) hat $f(x) = \cot x$ bei $x = 0$ einen unendlichen Sprung.

3.3: a) e.

b) $\frac{\pi}{4}$.

c) Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ und der Stetigkeit von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 2$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n+3}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3}} = \sqrt{2}.$$

d) Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ und der Stetigkeit von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = e$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

3.4: a) f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

b) f ist an der Stelle $x = 2$ rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.

3.5: Die Behauptung folgt nach Satz 3.9 aus

$$2 \lg 2 - 1 < 2 \cdot 0,31 - 1 < 0 \quad \text{und} \quad 3 \lg 3 - 1 > 3 \cdot 0,47 - 1 > 0.$$

3.6: a) $\{-1, 0, 1\}$ (kein Intervall!).

b) Satz 3.10 ist nicht anwendbar, da f auf $(-\infty, +\infty)$ nicht stetig ist [vgl. Aufgabe 3.2a)].

4.1: Mittlere Stromstärke im Intervall $t_0 \dots t_0 + \Delta t$: $\frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t}$.

Stromstärke zur Zeit t_0 : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t} = \dot{Q}(t_0)$.

4.2: Mittlere Dichte: $\frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}$, $\rho(x_0) = m'(x_0)$.

4.3: Für $f(x) = \sin x$ ist $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

also Gleichung der Tangente: $y = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

4.4: $f'_t(0) = 1$, $f'_l(0) = -1$ (vgl. Aufgabe 2.3).

4.5: a) $f'(x) = 6x - 5 - 3 \cos x$.

b) $f'(x) = (4x^3 + 4) \sin x + (x^4 + 4x) \cos x$.

$$c) f'(x) = \frac{(2x - \cos x)(2 + \sin x) - (x^2 - \sin x) \cos x}{(2 + \sin x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{4x + 2x \sin x - 2 \cos x - x^2 \cos x}{(2 + \sin x)^2}.$$

$$4.6: v(t) = s(t) = gt + v_0.$$

$$4.7: a) \text{ Mit } y = z^7, z = 2x^3 - 3x + 4 \sin x \text{ folgt}$$

$$y' = 7(2x^3 - 3x + 4 \sin x)^6 (6x^2 - 3 + 4 \cos x).$$

$$b) \text{ Mit } y = \sin z, z = w^4, w = x^3 + 3x^2 - 8 \text{ folgt}$$

$$y' = \cos(x^3 + 3x^2 - 8)^4 \cdot 4(x^3 + 3x^2 - 8)^3 (3x^2 + 6x).$$

4.8: Zur Raumeinsparung beweisen wir nur die letztgenannte Formel. Mit

$$y = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \text{ also } x = \arctan y \quad (-\infty < y < +\infty)$$

folgt

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

also – nach Ersetzen von y durch x – die Behauptung.

$$4.9: a) (\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

b) Analog a).

4.10: a) f ist für alle $x > 0$ definiert und differenzierbar, und mit

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-5} - 3^x x^3$$

folgt

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - 10x^{-6} - 3^x \ln 3 x^3 - 3^x \cdot 3x^2,$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} - \frac{10}{x^6} - x^2 \cdot 3^x (x \ln 3 + 3).$$

b) f ist für alle $x > 0, x \neq 1$ definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

c) f ist für alle $x \neq 0$ definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

d) f ist für alle x definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}.$$

e) f ist für alle $x \leq \frac{1}{2}$ definiert und für alle $x < \frac{1}{2}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} + \sin \sqrt{1-2x} \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}},$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} - \frac{\sin \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}.$$

f) f ist für alle x definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = 2 \cosh \frac{1-x^2}{1+x^2} \sinh \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \sinh \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}.$$

4.11: Gesucht sind alle Kurvenpunkte $P(x, y)$ mit $y' = 0$. Wegen $y' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2(4x+2)$ ist $x = -\frac{1}{2}$ oder $x = 1$, also $P_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, $P_2(1, 0)$.

4.12: $v(t) = \dot{s}(t) = -A e^{-\gamma t} [\gamma \cos(\omega t - \alpha) + \omega \sin(\omega t - \alpha)]$.

4.13: a) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

$$\text{b) } f'(x) = (\tan x)^x \left(\ln \tan x + \frac{x}{\sin x \cos x} \right).$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)^3 \sqrt{x-2}} \left[\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-3)} - \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x-2)} \right].$$

4.14: $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

$x = 0$: Der Differenzenquotient $\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin \frac{1}{h}$ ($h \neq 0$) konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen null [s. Lösung von Aufgabe 3.1 d)]. Daher gilt $f'(0) = 0$.

4.15: $f'(x) = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x} \sin 2x$,

$$f''(x) = e^{\sin^2 x} [(\sin 2x)^2 + 2 \cos 2x].$$

$$4.16: \frac{d^v(x^n)}{dx^v} = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-v+1) x^{n-v} & \text{für } v < n, \\ n! & \text{für } v = n, \\ 0 & \text{für } v > n. \end{cases}$$

$$4.17: \text{a) } \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{für } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \geq 0, \text{ ganz}).$$

$$\text{b) } \left. \frac{d^n \cos x}{dx^n} \right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$4.18: \frac{d^n(a^x)}{dx^n} = a^x (\ln a)^n \qquad \frac{d^n(e^x)}{dx^n} = e^x.$$

$$4.19: m\ddot{s} = -mAw_0^2 \cos(\omega_0 t - \alpha) = -ks = F.$$

$$4.20: a) f^{(4)}(x) = 3 \cdot 4! + 0 + \frac{1}{2^4} \cos \frac{x}{2} = 72 + \frac{1}{16} \cos \frac{x}{2};$$

$$b) f^{(4)}(x) = (x^3 \cdot e^{-x})^{(4)} = (x^3 - 12x^2 + 36x - 24) e^{-x}.$$

$$5.1: a) df(x) = -\sin x \, dx.$$

$$b) df(x) = (1 - x) e^{-x} \, dx.$$

$$c) df(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \, dx.$$

$$5.2: \text{Mit } y = \sin x, \, dy = \cos x \, dx, \, x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \, dx = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ gilt } \sin 46^\circ = \sin \frac{\pi}{4} + \Delta y \\ \approx \sin \frac{\pi}{4} + dy = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{180}, \, \sin 46^\circ \approx \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{180} \right) = 0,7194.$$

$$5.3: a) \text{Mit } \lg(750)^2 = 2(\lg 75 + 1), \, \frac{2}{3} = 0,667 \text{ erhält man } \bar{s} = 11,587.$$

$$b) |\Delta s| \leq (2 \cdot 0,5 + 0,5 + 3 \cdot 0,5) \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3},$$

$$\left| \frac{\Delta s}{\bar{s}} \right| < \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10} = 0,03\%.$$

$$c) 11,584 \leq s \leq 11,590, \text{ also gerundet } s = 11,6.$$

5.4: Mit

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad x = e, \quad \bar{x} = 2,72, \quad |dx| \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$$

folgt für den absoluten Fehler

$$|\sqrt{e+1} - \sqrt{3,72}| = |\Delta y| \approx |dy| \leq \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{3,72}} < 0,0014$$

und für den relativen Fehler

$$\left| \frac{\Delta y}{\sqrt{3,72}} \right| \approx \frac{|dy|}{\sqrt{3,72}} \leq \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,72} < 0,07\%.$$

$$5.5: \text{Mit } V = \frac{\pi}{6} D^3, \, dV = \frac{\pi}{2} \bar{D}^2 dD, \, \bar{D} = 6,35 \text{ cm}, \, |dD| \leq 0,02 \text{ cm folgt}$$

$$|\Delta V| \approx |dV| \leq \frac{\pi}{2} (6,35)^2 \cdot 0,02 \text{ cm}^3 < 1,27 \text{ cm}^3,$$

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \frac{|dV|}{V} = 3 \frac{|dD|}{\bar{D}} \leq 3 \cdot \frac{0,02}{6,35} < 0,95\%.$$

$$5.6: |\Delta y| \approx |dy| = \frac{Rl}{(l-\bar{x})^2} |dx| \leq \frac{Rl\delta}{(l-\bar{x})^2}, \quad \left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right| \approx \left| \frac{dy}{\bar{y}} \right| = \frac{l}{\bar{x}(l-\bar{x})} |dx| \leq \frac{l\delta}{\bar{x}(l-\bar{x})}.$$

$$5.7: a) d^3 f(x) = -\frac{1}{x^2} dx^3.$$

$$b) d^3 f(x) = 0.$$

$$6.1: \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0+\vartheta h} \Leftrightarrow \frac{e^h - 1}{h} = e^{\vartheta h} \Leftrightarrow \vartheta = \frac{1}{h} \ln \frac{e^h - 1}{h}.$$

In diesem Fall hängt ϑ nicht von x_0 , aber von der Intervalllänge h ab.

6.2: Mit $e^{x_0+h} = e^{x_0} + h e^{x_0+\vartheta h}$, $x_0 = 1$, $h = 0,01$ folgt wegen $0 < \vartheta < 1$

$$e + 0,01 e < e^{1,01} < e + 0,01 e^{1,01}$$

und daraus

$$2,7454 < 1,01 e < e^{1,01} < \frac{e}{0,99} < 2,7459.$$

6.3: Aus $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = g'(x)$ ($x > 1$) folgt $f(x) - g(x) = C$ ($x \geq 1$). Speziell $x = 1$:
 $-\frac{\pi}{2} - 0 = C$. Also gilt $\arcsin \frac{1}{x} + \arctan \sqrt{x^2-1} = \frac{\pi}{2}$ ($x \geq 1$).

6.4: Wegen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$.

Daraus folgt die Behauptung.

$$6.5: \begin{array}{c|cccccc} 2 & -2 & 0 & 1 & -7 & -4 \\ 2 & 6 & 12 & 36 & 111 & 312 \\ \hline \cdot 3 & 2 & 4 & 12 & 37 & 104 & 308 = g(3) \end{array}$$

6.6: Mit dem Horner'schen Schema ($x_0 = -2$) erhält man

$$\begin{aligned} g(x) &= 105 - 328(x+2) + 450(x+2)^2 - 315(x+2)^3 \\ &\quad + 120(x+2)^4 - 24(x+2)^5 + 2(x+2)^6, \\ g^{(4)}(-2) &= 120 \cdot 4! = 2880. \end{aligned}$$

6.7: $x_0 = -3$ ist eine zweifache Nullstelle von g , und es gilt $g(x) = (x+3)^2(x^2 - 6x + 8)$.

6.8: $g(x) = 44 + 95(x-2) + [18(2+\vartheta(x-2))^2 + 1](x-2)^3$ ($0 < \vartheta < 1$).

$$6.9: \cosh x = \sum_{\nu=0}^k \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \frac{\cosh \vartheta x}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

6.10: Es gilt $f'(x) = e^{\cos x} \sin x$, $f''(x) = e^{\cos x} (\sin^2 x - \cos x)$, $f'''(x) = \frac{1}{2} e^{\cos x} \sin 2x (\cos x + 3)$,
 $f^{(4)}(x) = e^{\cos x} [-\frac{1}{2} \sin x \sin 2x (\cos x + 4) + \cos 2x (\cos x + 3)]$.

Damit folgt $T_2(x) = e - \frac{e}{2} x^2$. Wegen $f'''(0) = 0$ ist $T_3(x) = T_2(x)$ und daher

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x) = T_2(x) + R_3(x).$$

Aus

$$|f'''(\vartheta x)| \leq \frac{1}{2} e^{|\cos \vartheta x|} |\sin 2\vartheta x| (|\cos \vartheta x| + 3)$$

und $|\cos t| \leq 1$, $|\sin t| \leq 1$ für alle t folgt $|f'''(\vartheta x)| \leq 2e$ und somit

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\vartheta x)|}{3!} |x|^3 \leq \frac{e}{3} |x|^3 < |x|^3$$

(letzteres wegen $e < 3$). Analog findet man

$$|R_3(x)| \leq \frac{13e}{48} x^4 < x^4,$$

und diese Schranke ist für $|x| < 1$ kleiner als die für $|R_2(x)|$ erhaltene.

$$\text{6.11: } \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \right| = |R_3(x)| \leq \frac{x^4}{24}. \text{ Wegen}$$

$$\frac{x^4}{24} < 10^{-4} \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt[4]{24}}{10} = 0,22 \dots$$

ist der Fehler sicher kleiner als 10^{-4} , wenn $|x| < 0,22$ ist ($0,22 \approx 12^\circ 36'$).

$$\text{6.12: } h = l(1 - \cos x) \approx l \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \right] = \frac{l}{2} x^2.$$

$$\text{6.13: a) Wegen } d = h - \sqrt{h^2 - s^2} = h \left(1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{h^2}} \right) \text{ folgt aus (6.69) mit } x = -\frac{s^2}{h^2}$$

$$d \approx \frac{s^2}{2h}.$$

$$\text{b) Wegen } \frac{s^2}{h^2} \leq \frac{0,01}{2,25} < 10^{-2}, \text{ also } -10^{-2} < \frac{s^2}{h^2} < 0 \text{ gilt nach Beispiel 6.11}$$

$$\left| d - \frac{s^2}{2h} \right| = h \left| \frac{d}{h} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{h^2} \right| = h \left| R_1 \left(-\frac{s^2}{h^2} \right) \right| < 1,5 \cdot 2,53 \cdot 10^{-5} \text{ m} < 0,04 \text{ mm}.$$

6.14: Aus (6.58) und (6.60a) mit $n = 1$ folgt

$$\ln \frac{x_2}{x_1} = \ln \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1} \right) \approx \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

mit

$$\left| \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_1} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{6.15: Nach (6.50) mit } n = 1 \text{ ist } e^{-\frac{kt}{m}} \approx 1 - \frac{kt}{m}. \text{ Damit folgt } v \approx \left(g - \frac{k}{m} v_0 \right) t + v_0.$$

$$\text{6.16: Wegen } \frac{1}{\sqrt[3]{1100}} = \frac{1}{10} (1 + 0,1)^{-\frac{1}{3}} \text{ verwenden wir (6.62) mit } x = 0,1 \text{ und } \alpha = -\frac{1}{3}. \text{ Für } n = 2 \text{ ergibt sich}$$

$$(1 + 0,1)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,1 + \frac{2}{9} \cdot 0,01 + R_2(0,1)$$

mit

$$|R_2(0,1)| \leq \frac{14}{81} \cdot 0,001 < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Rundet man den 2. und 3. Summanden von $T_2(0,1)$ auf 4 Stellen nach dem Komma, so erhält man

$\bar{y} = 0,9689$. Nach (6.75) ist

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1100}} - \frac{1}{10} \bar{y} \right| = \frac{1}{10} \left| (1 + 0,1)^{-\frac{1}{3}} - \bar{y} \right| < \frac{1}{10} (2 + 2 \cdot 0,5) \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-5}.$$

Der Wert $\frac{1}{10} \bar{y} = 0,09689$ hat also die vorgeschriebene Genauigkeit; es gilt

$$0,09686 < \frac{1}{\sqrt[3]{1100}} < 0,09692, \text{ also gerundet } \frac{1}{\sqrt[3]{1100}} = 0,0969.$$

$$7.1: a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{4 \sin x} \frac{\cos x}{\pi - 2x} \right) = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-2} = -\frac{1}{8}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$7.2: a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \frac{2}{3}.$$

$$7.3: a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right]'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = a, \text{ also } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x} \right) = 1 \cdot 0 = 0, \text{ also}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

7.4: f ist auf $(-\infty, -2]$ und $[0, +\infty)$ streng monoton wachsend und auf $[-2, 0]$ streng monoton fallend.

7.5: f ist auf $(-1, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, +\infty)$ streng monoton wachsend, daher gilt

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \text{für jedes } x > -1, x \neq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

7.6: Kritische Stellen: $x_k^{(1)} = 2k\pi$, $x_k^{(2)} = (2k+1)\pi$ (k ganz). Wegen $f''(x_k^{(1)}) = -8 < 0$ hat f bei $x_k^{(1)}$ relative Maxima; $f(x_k^{(1)}) = 5$. Wegen

$$f''(x_k^{(2)}) = f'''(x_k^{(2)}) = 0, \quad f^{(4)}(x_k^{(2)}) = 12 > 0$$

hat f bei $x_k^{(2)}$ relative Minima; $f(x_k^{(2)}) = -3$.

b) Kritische Stellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. $f(0)$ ist kein relativer Extremwert, $f(3) = 27e^{-3} = 1,34$ ist relatives Maximum.

7.7: a) Kritische Stellen: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$. $f(-1)$ ist kein relativer Extremwert, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5^5}{2^6} = -48,83$ ist relatives Minimum.

$$b) f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x > 1, \\ -2x+1 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Kritische Stellen: $x_1 = 1$ (dort ist f nicht differenzierbar), $x_2 = \frac{1}{2}$. Wegen

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 1 \quad \text{und für } x < \frac{1}{2}, \\ < 0 & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

ist $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ relatives Maximum, $f(1) = 0$ relatives Minimum.

7.8: Kritische Stellen in $[-2, 3]$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ mit $f(-1) = -108$, $f(2) = 0$. Randwerte: $f(-2) = -64$, $f(3) = 36$. Also absolutes Maximum: $f(3) = 36$, absolutes Minimum: $f(-1) = -108$.

7.9: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Mit $h = \frac{V}{\pi r^2}$ folgt $S = f(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$.

Gesucht ist die absolute Minimumstelle $r = r_0$ von f auf $(0, +\infty)$.

Man findet mit Satz 7.8

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{und damit} \quad h_0 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_0.$$

7.10: Die Funktion $f(\bar{x}) = \bar{x}(l - \bar{x})$ nimmt ihr absolutes Maximum auf $(0, l)$ an der Stelle $\bar{x} = \frac{l}{2}$ an. Da $l|dx|$ nicht von \bar{x} abhängt, ist dort $\left|\frac{dy}{\bar{y}}\right| = \frac{l|dx|}{\bar{x}(l - \bar{x})}$ am kleinsten.

7.11: Transportkosten pro Wareneinheit für beliebiges x :

$$f(x) = \alpha \sqrt{x^2 + a^2} + \beta(l - x).$$

Gesucht ist die absolute Minimumstelle von f auf $[0, l]$. Einzige kritische Stelle von f ist

$$x_1 = \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

Wegen

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_1, \\ > 0 & \text{für } x > x_1 \end{cases} \quad (*)$$

hat f dort ein relatives Minimum, das damit auch das absolute Minimum von f auf $(-\infty, +\infty)$ ist.

1. Ist $x_1 \in [0, l]$, also $x_1 \leq l$, dann ist $x_0 = x_1$.

2. Ist $x_1 > l$, dann ist $x_0 = l$, da f wegen $(*)$ für $x \leq l < x_1$ streng monoton fällt.

7.12: f ist auf $(-\infty, -\sqrt{3}]$ und $[0, \sqrt{3}]$ streng konkav und auf $[-\sqrt{3}, 0]$ und $[\sqrt{3}, +\infty)$ streng konvex.

7.13: Wendepunkt: $P\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right) = P(0,22; -0,07)$, Wendetangente: $y = -2e^{-\frac{3}{2}}x + \frac{1}{2}e^{-3}$.

7.14: a) Bestimmung der Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom führt auf

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)^2}.$$

Also ist f für alle $x \neq 3$ stetig; $x = 3$ ist Polstelle 2. Ordnung, wobei $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$. Weiter ist f auf $(-\infty, \frac{7}{5}]$ und $(3, +\infty)$ streng monoton fallend, auf $[\frac{7}{5}, 3)$ streng monoton wachsend. Relatives Minimum: $f(\frac{7}{5}) = -\frac{9}{16} = -0,56$; ein relatives Maximum ist nicht vorhanden. f ist auf $(-\infty, \frac{3}{5}]$ streng konkav, auf $[\frac{3}{5}, 3)$ und $(3, +\infty)$ streng konvex. Wendepunkt: $P(\frac{3}{5}, -\frac{7}{18}) = P(0,6; -0,39)$. Asymptoten: $x = 3$ (s. oben) und $y = 1$ (für $x \rightarrow \pm\infty$). Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Zusätzliche Funktionswerte: $f(-2) = \frac{4}{25} = 0,16$, $f(\frac{5}{2}) = 7$, $f(4) = 10$, $f(5) = \frac{9}{2} = 4,5$ (s. Bild 7.29).

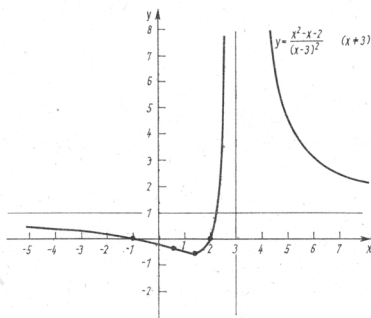


Bild 7.29

b) f ist unstetig bei $x = -2, -1, 1$. Bei $x = -2$ hat f eine Lücke; diese ist wegen

$$f(x) = \frac{x^2(x+2)^3}{(x-1)(x+1)^2} \quad (x \neq -2, -1, 1)$$

eine hebbare Unstetigkeitsstelle; in punktierter Umgebung von $x = -2$ verhält sich f wie in punktierter Umgebung einer dreifachen Nullstelle. Bei $x = -1$ hat f eine Polstelle 2. Ordnung; es gilt $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$. Bei $x = 1$ hat f eine Polstelle 1. Ordnung; es gilt $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$. Weiter ist $x = 0$ zweifache Nullstelle von f ; wegen $f(x) < 0$ für $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ hat f bei $x = 0$ ein rel. Maximum i. e. S. $g(x) = x^2 + 5x + 8$ ist Asymptote von f für $x \rightarrow \pm\infty$; für

$x < -1$ ist $f(x) < g(x)$, für $x > 1$ ist $f(x) > g(x)$. Hiermit und mit Funktionswerten für einige $x > 1$ folgt, daß f in der Nähe von $x = 1,9$ ein rel. Minimum hat (s. Bild 7.30).

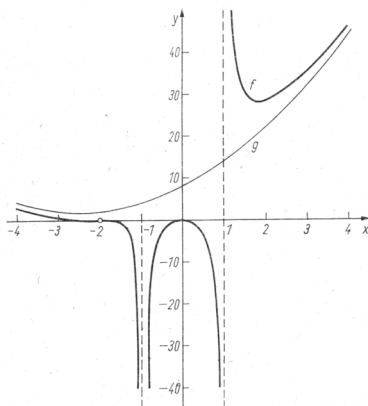


Bild 7.30

c) Mit den Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} (x - \mu) e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

folgt: f ist auf $(-\infty, \mu]$ streng monoton wachsend und auf $[\mu, +\infty)$ streng monoton fallend. Relatives

Maximum: $f(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$; ein relatives Minimum ist nicht vorhanden. f ist auf $(-\infty, \mu - \sigma]$

und $[\mu + \sigma, +\infty)$ streng konvex, auf $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ streng konkav. Wendepunkte bei $\mu - \sigma$ und

$\mu + \sigma$ mit $f(\mu - \sigma) = f(\mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} e}$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ ist die x -Achse Asymptote

für $x \rightarrow \pm \infty$. Ferner gilt $f(\mu - x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = f(\mu + x)$ (d. h., die Bildkurve von f ist symmetrisch zu der Geraden $x = \mu$) und $f(x) > 0$ für alle x (s. Bild 7.31).

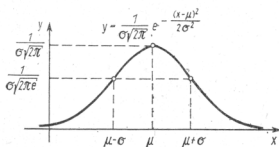


Bild 7.31

7.15: Für $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$ gilt $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} < 0$, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$,
 $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Daher hat f auf $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ genau eine Nullstelle ξ . Wegen $f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \geq 2 - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}^3}}$
 $= 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ wählen wir $x_0 = 1$ (da $f(1) > 0$) und erhalten die folgenden Werte:

| n | x_n | $\sqrt{x_n}$ | $f(x_n)$ |
|-----|--------------|--------------|---------------|
| 0 | 1 | 1 | 0,5 |
| 1 | 0,8 | 0,894 427 19 | 0,034 427 19 |
| 2 | 0,784 054 23 | 0,885 468 37 | 0,000 209 395 |
| 3 | 0,783 956 05 | 0,885 412 93 | 0,000 000 008 |

7.16: a) Wegen

$$|\varphi_1'(0,15)| = \left| -\frac{1 + \ln 0,15}{(0,15)^2} \right| > \frac{0,89}{0,03} > 29,$$

$$|\varphi_2'(0,15)| = \frac{1}{2 \cdot 0,15 \sqrt{2 + \ln 0,15}} > \frac{1}{0,3 \sqrt{0,11}} > 10$$

sind die Darstellungen (7.43 a) und (7.43 b) nicht geeignet. Wegen

$$0 \leq \varphi_3'(x) \leq 2 \cdot 0,2 e^{(0,2)^2 - 2} < 0,06 \quad \text{für jedes } x \in I = [0,1; 0,2]$$

ist (7.43 c) sehr gut geeignet (vgl. aber Beispiel 7.27).

b) Mit $x_{n+1} = \varphi_3(x_n) = e^{x_n^2 - 2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) erhält man die folgenden Werte:

| n | x_n |
|-----|--------------|
| 0 | 0,15 |
| 1 | 0,138 414 84 |
| 2 | 0,137 953 12 |
| 3 | 0,137 935 52 |

7.17: a) $\xi = \varphi(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) = 0$.

b) Man erhält das Newtonsche Verfahren, das damit ein Spezialfall des allgemeinen Iterationsverfahrens ist.

c) Wegen

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f'''(x)}{[f'(x)]^2}$$

lautet (7.45)

$$\left| \frac{f(x) \cdot [f'''(x)]}{[f'(x)]^2} \right| \leq q \quad (0 \leq q < 1). \quad (*)$$

Gilt (*) in einem geeigneten die Nullstelle ξ von f enthaltenden Intervall und liegt x_0 „hinreichend nahe“ bei ξ , dann konvergiert die nach dem Newtonschen Verfahren ermittelte Folge (x_n) gegen ξ . (Die in Satz 7.14 angegebenen Konvergenzbedingungen lassen sich leichter nachprüfen.)

$$\begin{aligned} 9.1: \text{ a) } \int \left(x^3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3} \right) dx &= \int x^3 dx + \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{4}{x^3} dx = \int x^3 dx + 2 \int \frac{dx}{x} - 4 \int x^{-3} dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 2 \ln |x| + \frac{2}{x^2} + c \end{aligned}$$

(Vor.: über das Integrationsintervall I : $0 \notin I$, d. h. $x \neq 0$ für alle $x \in I$).

$$\text{b) } \int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + c = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c \quad (\text{Vor.: } x > 0).$$

9.2: a) Durch die Substitution $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x} dx$) erhält man:

$$\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dx}{9 + 2x^2} &= \int \frac{dx}{9 \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} x \right)^2 \right)} = \frac{3}{9\sqrt{2}} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{3}{9\sqrt{2}} \arctan u + c \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c \quad \left(\text{Substitution: } u = \frac{\sqrt{2}}{3} x \right). \end{aligned}$$

c) Durch die Substitution $\arctan x = u$ ($\frac{1}{1+x^2} dx = du$) erhält man:

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c.$$

$$\begin{aligned} \text{d) Durch die Substitution } z = 8x^3 - 1 \quad (dz = 24x^2 dx) \text{ erhält man: } &\int x^2 \sqrt{8x^3 - 1} dx \\ &= \int \frac{1}{24} \sqrt{z} dz = \frac{1}{24} \cdot \frac{2}{3} z \sqrt{z} + c = \frac{1}{36} (8x^3 - 1) \sqrt{8x^3 - 1} + c \end{aligned}$$

(Vor.: $8x^3 - 1 \geq 0$ für alle x aus dem Integrationsintervall I).

$$9.3: \text{ a) } \ln |f(x)|, \quad \text{b) } 2 \ln |x^3 + 2x + 1|, \quad \text{c) } -\frac{1}{3} \ln |\cos 3x|.$$

9.4: a) Durch die Substitution $u = 4x - 2$ ($du = 4 dx$) erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4x-2)^3} &= \int \frac{du/4}{u^3} = \frac{1}{4} \int u^{-3} du = -\frac{1}{8} u^{-2} + c \\ &= -\frac{\frac{1}{8}}{(4x-2)^2} + c \quad \left(\text{Vor.: } x \neq \frac{1}{2} \text{ für alle } x \in I \right). \end{aligned}$$

b) Durch partielle Integration erhält man (s. Formel (9.15)):

$$\int x e^{3x} dx = x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 1 dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c.$$

c) Zweimalige Anwendung der partiellen Integration liefert:

$$\begin{aligned}
 \int (\sin 4x) x^2 dx &= \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) x^2 - \int \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) \cdot 2x dx \\
 &= -\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \int (\cos 4x) x dx = -\frac{x^2}{4} \cos 4x \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} \sin 4x\right) x - \int \left(\frac{1}{4} \sin 4x\right) \cdot 1 dx \right] \\
 &= -\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{x}{8} \sin 4x + \frac{1}{32} \cos 4x + c.
 \end{aligned}$$

9.5: a) Der Radikand ist durch Partialdivision umzuformen:

$$(2x^3 + 9x^2 + 8x + 5) : (x^2 + 4x + 3) = 2x + 1 + 2 \frac{-x + 1}{x^2 + 4x + 3}.$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung des echt gebrochen-rationalen Bruchs:

$$\frac{-x + 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Durch Einsetzungsmethode folgt leicht $A = 1$ und $B = -2$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^3 + 9x^2 + 8x + 5}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int (2x + 1) dx + 2 \left[\int \frac{dx}{x + 1} - 2 \int \frac{dx}{x + 3} \right] \\
 &= x^2 + x + 2 \ln \frac{|x + 1|}{(x + 3)^2} + c.
 \end{aligned}$$

b) Ansatz für die Partialbruchzerlegung: $\frac{4x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{x^2(x^2 + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}.$

Durch Koeffizientenvergleichs- bzw. durch Grenzwertmethode und Einsetzungsmethode folgt:

$$\begin{aligned}
 A = 1, \quad B = -2, \quad C = 3, \quad D = 0. \\
 \int \frac{4x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{x^2(x^2 + 9)} dx &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} + 3 \int \frac{x}{x^2 + 9} dx \\
 &= \ln |x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 9) + c.
 \end{aligned}$$

c) Ansatz für die Partialbruchzerlegung (nach Durchführung der Partialdivision):

$$\frac{x^2 + 5}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}. \quad (*)$$

A bzw. B, C können durch Grenzwertmethode ermittelt werden. (*) wird mit $x - 1$ bzw. $x^2 + 4$ multipliziert, anschließend läßt man $x \rightarrow 1$ bzw. $x \rightarrow 2i$ gehen. Man erhält $A = 6/5, B = C = -1/5$.

Damit ist die Partialbruchzerlegung durchgeführt. Zwischenergebnis für das gesuchte Integral I :

$$\begin{aligned}
 I &= \int (x + 1) dx + \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{5} \int \frac{x + 1}{x^2 + 4} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{6}{5} \ln |x - 1| - \frac{1}{10} \ln (x^2 + 4) - \frac{1}{10} \arctan \frac{x}{2} + c.
 \end{aligned}$$

$\left(\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} \right)$; das 1. Integral kann durch die Substitution $x^2+4 = u$ gelöst werden, das 2. Integral kann sofort auf das in Formel (9.10) angegebene Grundintegral zurückgeführt werden.)

$$d) \int \frac{x dx}{2x^2 + 5x - 3} = \int \frac{x dx}{(x+3)(2x-1)};$$

(Ansatz für die Partialbruchzerlegung: $\frac{x}{(x+3)(2x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-1}$. Hieraus ergibt sich

(z. B. durch Einsetzungsmethode: $x = 0, x = 1$) $A = 3/7, B = 1/7$. Also gilt:

$$\int \frac{x dx}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{7} \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{3}{7} \ln|x+3| + \frac{1}{14} \ln|2x-1| + c.$$

(Voraussetzung über das Integrationsintervall I : $-3 \notin I, \frac{1}{2} \notin I$.)

$$9.6: a) \text{ Substitution: } \sqrt{2x-1} = t \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{2}, dx = t dt.$$

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}} = \int \frac{t dt}{\frac{1+t^2}{2} + t} = \int \frac{2t dt}{(1+t)^2} = I_1.$$

I_1 ist ein Integral über eine echt gebrochene rationale Funktion, welches nach dem in 9.2. angegebenen Verfahren („Partialbruchzerlegung“) gelöst werden kann. In diesem Fall kommt man aber auch durch die Substitution $1+t = u$ sehr schnell zum Ziel:

$$I_1 = 2 \int \frac{u-1}{u^2} du = 2 \int \frac{du}{u} - 2 \int \frac{du}{u^2} = 2 \ln|u| + \frac{2}{u} + c.$$

Rücktransformation $u = 1+t = 1 + \sqrt{2x-1}$ liefert das Ergebnis:

$$I = 2 \ln(1 + \sqrt{2x-1}) + \frac{2}{1 + \sqrt{2x-1}} + c \quad (\text{Vor.: } 2x-1 \geq 0, \text{ d. h. } x \geq \frac{1}{2}).$$

b) Durch die Substitution $t = \sqrt[4]{3x+2} \left(x = \frac{t^4-2}{3}, dx = \frac{4}{3} t^3 dt \right)$ geht das Integral über in $\frac{4}{9} \int (t^6 - 2t^2) dt$. Integration und Rücktransformation liefert das Ergebnis:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{3x+2}} = \sqrt[4]{(3x+2)^3} \left(\frac{4}{63} (3x+2) - \frac{8}{27} \right) + c.$$

(Voraussetzung über das Integrationsintervall I : $x > -\frac{2}{3}$ für alle $x \in I$, d. h. $I \subset (-\frac{2}{3}, \infty)$.)

$$9.7: a) \text{ Substitution } e^x = t \Rightarrow dx = t dx;$$

$$I = \int \frac{dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{dt}{t(t^2-1)} = \int \frac{dt}{t(t+1)(t-1)} = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} \right) dt.$$

(Bei der letzten Umformung wurde die Partialbruchzerlegung angewendet.)

Hieraus folgt:

$$I = -\ln e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln|e^x - 1| + c \quad (\text{Vor.: } x \neq 0).$$

b) Die Substitution $t = e^x$ führt auf das Integral

$$\int \frac{t}{1+3t} \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+3t} = \frac{1}{3} \ln |1+3t| + c = \frac{1}{3} \ln (1+3e^x) + c.$$

(Warum konnten die Betragsstriche durch Klammern ersetzt werden?)

c) Substitution $t = e^x$ führt auf das Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{t} &= \int \left(\frac{3}{2} \frac{1}{t+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{t} \right) dt = \frac{3}{2} \ln |t+2| - \frac{1}{2} \ln |t| + c \\ &= \frac{3}{2} \ln (e^x+2) - \frac{1}{2} \ln (e^x) + c = \frac{3}{2} \ln (e^x+2) - \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

(Bei der ersten Umformung in dieser Gleichungskette wurde die Partialbruchzerlegung angewendet.)

9.8: a) Nach Formel (9.25) gilt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= -\ln |1-t| + \ln |1+t| + c = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\text{b) } I = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \quad (\text{Subst.: } t = \cos x).$$

Hinweis: Die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ führt auf eine relativ komplizierte Funktion in t .

9.9: Substitution: $\sqrt{4x^2 - 3x + 5} = t + 2x$. Durch Quadrieren ergibt sich: $4x^2 - 3x + 5 = t^2 + 4tx + 4x^2$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5-t^2}{4t+3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-2(2t^2+3t+10)}{(4t+3)^2}. \\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3x+5}} &= \int \frac{1}{t+2} \frac{5-t^2}{4t+3} \frac{-2(2t^2+3t+10)}{(4t+3)^2} dt \\ &= -2 \int \frac{dt}{4t+3} = -\frac{1}{2} \ln |4t+3| + c \\ &= -\frac{1}{2} \ln |4\sqrt{4x^2-3x+5} - 8x + 3| + c. \end{aligned}$$

$$10.1: \text{a) } \int_1^5 (x^4 + x^{-2}) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{x} \right]_1^5 = 626 - \frac{2}{5} = 625,6.$$

$$\text{b) } \int_0^2 (1-x^3) dx = \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2 - \frac{16}{4} = -2.$$

$$\text{c) } \int_0^2 3 \sin x dx = -3 \cos x \Big|_0^2 = -3 \cos 2 + 3 = 4,248.$$

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0.$$

10.2: a) $y = f(x) = x^2 - 4x$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Hieraus folgt: (vgl. Beispiel 10.1)

$$A = \int_{-1}^0 f(x) \, dx - \int_0^4 f(x) \, dx + \int_4^6 f(x) \, dx = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = 23,67.$$

$$\begin{aligned} b) \quad x &\leq -1 &\Rightarrow |x-2| + |x+1| &= -(x-2) - (x+1) = -2x+1, \\ -1 &\leq x \leq 2 &\Rightarrow |x-2| + |x+1| &= -(x-2) + (x+1) = 3, \\ x &\geq 2 &\Rightarrow |x-2| + |x+1| &= (x-2) + (x+1) = 2x-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hieraus folgt: } \int_{-3}^3 f(x) \, dx &= \int_{-3}^{-1} (-2x+1) \, dx + \int_{-1}^2 3 \, dx + \int_2^3 (2x-1) \, dx \\ &= 10 + 9 + 4 = 23. \end{aligned}$$

$$10.3: a) \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = 0,785.$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

$$10.4: F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 3, \\ 8x - \frac{1}{2}x^2 - 15 & \text{für } 3 < x \leq 6. \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} F_1(x) = F_1(3) = \frac{9}{2}.$$

$$10.5: u = \sqrt{1+2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = u \, du.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+2x}} &= \int \frac{\frac{1}{2}(u^2-1) \cdot u \, du}{u} = \frac{1}{2} \int (u^2-1) \, du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \\ &= \frac{u}{2} \left(\frac{u^2}{3} - 1 \right) = \frac{\sqrt{1+2x}}{2} \left(\frac{1+2x}{3} - 1 \right) = \frac{\sqrt{1+2x}}{3} (x-1). \end{aligned}$$

$$\text{Für das bestimmte Integral ergibt sich dann: } \left[\frac{1}{3} \sqrt{1+2x} (x-1) \right]_0^4 = \frac{10}{3} = 3,33.$$

$$\begin{aligned} 10.6: u = \cos x &\Rightarrow -du = \sin x \, dx \Rightarrow \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x - 4} = \int \frac{-du}{u^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u-2} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \ln |u+2| - \frac{1}{4} \ln |u-2| + c \quad (\text{Partialbruchzerlegung}). \end{aligned}$$

$$\text{Hieraus folgt: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x - 4} = \int_1^0 \frac{-du}{u^2 - 4} = \left[\frac{1}{4} \ln |u+2| - \frac{1}{4} \ln |u-2| \right]_1^0 = -\frac{1}{4} \ln 3 = -0,27.$$

10.7: $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 8, x_5 = 10$.

$$\begin{aligned}\int_0^{10} x^3 dx &\approx \frac{10}{5} \left[\frac{y_0 + y_5}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right] \\ &= 2 \left[\frac{f(0) + f(10)}{2} + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) \right] \\ &= 2 [500 + 8 + 64 + 216 + 512] = 2600.\end{aligned}$$

(Tatsächlicher Wert des Integrals: 2500.)

10.8: $x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3/2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 5/2,$
 $x_6 = 3, \quad x_7 = 7/2, \quad x_8 = 4 \quad (n = 8, m = 4; y_i = f(x_i)), \quad (i = 0, 1, \dots, 8);$

$$\int_0^4 x^2 \sqrt{1+x^2} dx \approx \frac{4}{24} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8].$$

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = 0 \quad (f(x) = x^2 \sqrt{1+x^2}), \quad y_5 = \frac{25}{8} \sqrt{29},$$

$$y_1 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \sqrt{5}, \quad y_6 = 9 \sqrt{10},$$

$$y_2 = f(x_2) = f(1) = \sqrt{2}, \quad y_7 = \frac{49}{8} \sqrt{53},$$

$$y_3 = f(x_3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} \sqrt{13}, \quad y_8 = 16 \sqrt{17}.$$

$$y_4 = f(x_4) = f(2) = 4 \sqrt{5}.$$

Numerische Auswertung ergibt: $\int_0^4 x^2 \sqrt{1+x^2} dx \approx 68$.

10.9: Nach Satz 10.17 gilt für den Flächeninhalt A des vorgegebenen Bereichs:

$$A = \int_0^4 \left(\frac{1}{4} x^2 + 1 - (-x) \right) dx = \left[\frac{1}{12} x^3 + x + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{16}{3} + 4 + \frac{16}{2} = \frac{104}{6} = \frac{52}{3}.$$

10.10: Die Kurven $y = \frac{1}{2}x^2$ und $y = 2x$ haben genau zwei Schnittpunkte $(x_1, y_1) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (4, 8)$. Die Kurve $y = \frac{1}{2}x^2$ verläuft auf dem Intervall $0 \leq x \leq 4$ unterhalb der Kurve $y = 2x$. Für den Flächeninhalt des eingeschlossenen Bereichs gilt nach Satz 10.17:

$$A = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^4 = \frac{16}{3} = 5,33.$$

10.11: a) $\dot{x} = 6 \frac{(-\sin t)t - \cos t}{t^2}, \quad \dot{y} = 6 \frac{(\cos t)t - \sin t}{t^2}.$

Hieraus folgt: $x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{36}{t^2}$ und $A = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 36t^{-2} dt = \frac{24}{\pi} = 7,64.$

b) $x = r \cos \varphi = a\varphi \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = a\varphi \sin \varphi.$

Hieraus folgt: $\dot{x} = a \cos \varphi - a\varphi \sin \varphi$, $\dot{y} = a \sin \varphi + a\varphi \cos \varphi$; $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2\varphi^2$.

$$\text{Also: } A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

10.12: Für die Bogenlänge S gilt: $S = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$. Das Integral kann durch die Substitution $u = 1 + \frac{9}{4}x$ gelöst werden:

$$S = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x \right) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \right]_0^8 \approx 24.$$

10.13: $x = a e^{k\varphi} \cos \varphi$, $y = a e^{k\varphi} \sin \varphi$ ist eine Parameterdarstellung der Spirale. Für die Bogenlänge S gilt nach Satz 10.19:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2} d\varphi.$$

Aus $\frac{dx}{d\varphi} = a \cdot e^{k\varphi} (k \cos \varphi - \sin \varphi)$ und $\frac{dy}{d\varphi} = a e^{k\varphi} (k \sin \varphi + \cos \varphi)$ folgt:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 e^{2k\varphi} (k^2 + 1)} d\varphi = a \sqrt{k^2 + 1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{k\varphi} d\varphi \\ &= \frac{a \sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{k\varphi_2} - e^{k\varphi_1}) = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (r_2 - r_1). \end{aligned}$$

(Abkürzung: $r_2 = a e^{k\varphi_2}$, $r_1 = a e^{k\varphi_1}$.)

$$\text{10.14: } V = \pi \int_0^9 (2\sqrt{x})^2 dx = 162\pi = 508,94.$$

$$\begin{aligned} \text{10.15: } A &= 2\pi \int_0^9 2\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) dx = 4\pi \int_0^9 \sqrt{x+1} dx \\ &= \left[4\pi \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} \right]_0^9 = \frac{8}{3} \pi (10\sqrt{10} - 1) \approx 256,5. \end{aligned}$$

$$\text{10.16: } A = \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}; \quad x_S = \frac{3}{64} \int_0^4 x x^2 dx = 3, \quad y_S = \frac{3}{128} \int_0^4 (x^2)^2 dx = \frac{24}{5} = 4,8.$$

$$\text{10.17: } A = \int_0^\pi \sin x dx = 2;$$

$$x_S = \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin x dx = \frac{1}{2} [\sin x - x \cos x]_0^\pi = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

$$y_S = \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{8} [x - \sin x \cos x]_0^\pi = \frac{\pi}{8} = 0,39.$$

(Berechnung der Integrale erfolgte mit Hilfe der partiellen Integration.)

$$11.1: \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2} \quad (\text{falls } a > 0).$$

$$11.2: \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}.$$

$$11.3: \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan(x+1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \\ = [\arctan(x+1)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

$$11.4: \int_{-\infty}^0 \sin x dx = [-\cos x]_{-\infty}^0 = -1 + \cos(-\infty) \text{ existiert nicht, weil } \cos(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x \\ \text{nicht existiert. (} \cos x \text{ ist unbestimmt divergent für } x \rightarrow -\infty \text{.)}$$

$$11.5: \text{CH } \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-\omega}^{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\omega^4}{4} - \frac{\omega^4}{4} \right) = 0.$$

Der Cauchysche Hauptwert des uneigentlichen Integrals existiert also und ist gleich null. Das uneigentliche Integral selbst existiert nicht, denn es gilt:

$$\int_{-\infty}^0 x^3 dx = -\infty \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} x^3 dx = \infty.$$

$$11.6: \text{Wegen } e^x > 1 \forall x > 0 \text{ gilt } x^2 e^x > x^2 \forall x > 0. \text{ Hieraus folgt: } f(x) = \frac{1}{x^2 e^x} < \frac{1}{x^2} =: g(x).$$

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = 1 \text{ (vgl. Beispiel 11.1). Nach Satz 11.1 muß dann auch } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ existieren.}$$

$$11.7: \text{a) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ [-\sqrt{1-x^2}]_0^{1-\varepsilon} \} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ -\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} + 1 \} = 1; \text{ das Integral ist also konvergent.}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ [\ln x]_{\varepsilon}^1 \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ \ln 1 - \ln \varepsilon \} = +\infty; \text{ das Integral ist also divergent.}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{ -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \} = -1; \text{ das Integral ist also konvergent. (Zur Berechnung von } \int \ln x dx \text{ s. Beispiel 9.13 in 9.1.5.; } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0 \text{ mit Hilfe der l'Hospitalischen Regel!)} \\ \varepsilon \rightarrow +0$$

$$\text{d) } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^4} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{(x-1)^4} = \infty + \infty = \infty; \text{ das Integral ist also divergent (s. Beispiel 11.11).}$$

Literatur

- [1] *Bronstein, J. N.; Semendjajew, K. A.*: Taschenbuch der Mathematik. 22. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1985.
- [2] *Dallmann, H.; Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. I. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1968.
- [3] *Dück, W.*: Numerische Methoden der Wirtschaftsmathematik I. Berlin: Akademie-Verlag 1970.
- [4] *Dück, W.; Bliefernich, M.* (Hrsg.): Operationsforschung Bd. I u. Bd. II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.
- [5] *Fichtenholz, G. M.*: Differential- und Integralrechnung (Übersetzung aus dem Russischen). Bd. I (11. Aufl.) und Bd. II (8. Aufl.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979.
- [6] *Grabowski, H.; Fücke, R.; Schroedter, R.*: Praktische Mathematik. 2. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974.
- [7] *Heinrich, H.*: Einführung in die Praktische Analysis, Bd. I. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1963.
- [8] *Jahnke, E.; Emde, F.*: Tafeln höherer Funktionen, 5. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1952.
- [9] *Kamke, E.*: Das Lebesgue-Stieltjes-Integral, 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960.
- [10] *v. Mangoldt, H.; Knopp, K.*: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I (16. Aufl.), Bd. II (14. Aufl.), Bd. III (14. Aufl.). Leipzig: S. Hirzel Verlag 1979, 1978, 1975.
- [11] *Piskunow, N. S.*: Differential- und Integralrechnung T. 1 (3. Aufl.), T. 2 (2. Aufl.), T. 3 (2. Aufl.) (Übersetzung aus dem Russischen). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972, 1970, 1970.
- [12] *Schröder, K.* (Hrsg.): Mathematik für die Praxis I, II, III, 3. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
- [13] *Smirnow, W. J.*: Lehrgang der höheren Mathematik I (13. Aufl.), II (15. Aufl.) (Übersetzung aus dem Russischen) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, 1981.
- [14] *Tutschke, W.*: Grundlagen der reellen Analysis I, II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.
- [15] *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 4. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1963.
- [16] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II (Algebra) (Übersetzung aus dem Russischen). 7. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978. (Bd. I: Arithmetik, Bd. III: Analysis, Bd. IV u. V: Geometrie)
- [17] Kleine Enzyklopädie Mathematik, 6. Aufl. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1971.
- [18] Lehrbriefe für das Fernstudium, Mathematik, 1. bis 22. Lehrbrief (herausgegeben von der Technischen Universität Dresden). III. Ausgabe. Berlin: VEB Verlag Technik 1967.
- [19] *Lemnitzer, K.*: Einführung in die Technik des Integrierens (Lehrprogrammabuch). Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1972.
- [20] Mathematik für Ökonomen, Bd. 1 u. 2. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1979.

Namen- und Sachregister

Ableitung 9

- der Umkehrfunktion 49
- 1. Ordnung 40
- einer Summe 46
- eines Produkts 46
- – Quotienten 46
- , einseitige 43
- , linksseitige 43
- , logarithmische 56
- mittelbarer Funktionen 48
- n -ter Ordnung 60
- , rechtsseitige 43
- , uneigentliche rechtsseitige 45

Ableitungen, Tabelle 51

absolut konvergent 215

absoluter Extremwert 35

– Fehler 67

absolutes Maximum 34

– Minimum 34

äußeres Maß 201

d'Alembert, Jean le Rond 9

Anstieg einer Kurve 39, 40

Anziehungskraft (bei Massenpunkten) 210

Arbeit 193, 194

–, elektrische 198

Asymptote 121

ausgezeichnete Einteilungsfolge 162

Balkenbiegung 44

Bereich, homogener 197

Bernoulli, Jakob 9

–, Johann 9

Bernoullische Regeln 99

Beschleunigung 62

bestimmt divergent 18

bestimmtes Integral 162

– – mit variabler oberer Grenze 167

Bogendifferential 189

Bogenelement 189

Bogenlänge 187

Bolzano 35

Cauchy, Augustin Louis 9

Cauchysche Form des Restgliedes 85

Cauchyscher Hauptwert 211

Cavalierisches Prinzip 190

Dichte 41

Differential 1. Ordnung 64

– der unabhängigen Variablen 65

Differential n -ter Ordnung 72

Differentialgleichung, gewöhnliche 58

Differentialquotient 1. Ordnung 40

– n -ter Ordnung 61

Differentiation 40

–, logarithmische 55

Differentiationsoperator 59

Differenzenquotient 40

differenzierbar 40

–, linksseitig 43

–, rechtsseitig 43

Differenzierbarkeit auf einem Intervall 45

divergent, unbestimmt 18

divergentes, uneigentliches Integral 207

echt gebrochene Funktion 149

eindeutig 37

einseitige Ableitung 43

– Tangente 43

Einteilungsfolge, ausgezeichnete 162

Elastizität 38, 41

elektrische Arbeit 198

elementare Funktion 32, 142

elliptische Integrale 159

elliptisches Integral 2. Gattung 188

erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung 78

Extremwert, absoluter 35

–, relativer 106

Faßregel, Keplersche 178

Fehler, absoluter 67

–, relativer 67

Fehlerrechnung 67

Feinheitmaß 161

Fermat, Pierre de 73

Fixpunkt 132

Flächeninhalt 163

Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen 161

Formel von Newton-Leibniz 169

Funktion, echt gebrochene 149

–, rationale 149

–, unecht gebrochene 149

– (rationale) zweier Veränderlicher 156

Funktionen, Ableitung mittelbarer 48

–, elementare 32, 142

–, integrierbare 163

geometrischer Schwerpunkt 197

Geschwindigkeit 38, 41

gewöhnliche Differentialgleichung 58

Glockenkurve 210

Grenzwert 9, 11

–, linksseitiger 15

–, rechtsseitiger 14

–, uneigentlicher 18

Grundintegrale 142

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 169
- Hauptwert, Cauchyscher 211
- hebbare Unstetigkeitsstelle 29
- homogener Bereich 197
- Horizontalwendepunkt 119
- Hornersches Schema 80
- de l'Hospital 9
- l'Hospitalsche Regeln 99
- Inhalt 200
- inneres Maß 201
- Integral, bestimmtes 162
- (bestimmtes) mit variabler oberer Grenze 167
- , divergentes uneigentliches 207
- , elliptisches 159
- , konvergentes uneigentliches 207
- , Lebesguesches 203
- , Riemann-Stieltjes- 204
- , unbestimmtes 141
- Integrale (uneigentliche), Konvergenzkriterien 213
- (–), Majorantenkriterien 213
- (–) mit nichtbeschränkter Funktion 215
- (–) – unendlichen Grenzen 206
- Integralrechnung, Mittelwertsatz 165
- Integralsumme 161
- Integration, partielle 147
- rationaler Funktionen 149
- Integrationskonstante 141
- Integrationsregeln 143
- integrierbare Funktionen 163
- Intervall, Stetigkeit auf einem 28
- , Differenzierbarkeit auf einem 45
- Iterationsverfahren 132
- Keplersche Faßregel 178
- Kettenregel 48
- k -fache Nullstelle 83
- Koeffizientenvergleichsmethode 152
- konkav 117
- konvergentes uneigentliches Integral 207
- Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale 213
- konvex 117
- kritische Stelle der Funktion 106
- Kurvendiskussion 121
- Lagrangesche Form des Restgliedes 85
- Landausche Ordnungssymbole 23
- Länge eines ebenen Kurvenstücks 186
- Lebesgue-Integral 203
- -Maß 203
- Leibniz, Gottfried Wilhelm 9
- Leibnizsche Regel 63
- linksseitig differenzierbar 43
- linksseitige Ableitung 43
- Stetigkeit 27
- linksseitiger Grenzwert 15
- logarithmische Ableitung 56
- Differentiation 55
- Spirale 188
- MacLaurinsche Form der Taylorschen Formel 87
- Majorante 214
- Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale 213
- Maß 200
- , äußeres 201
- , inneres 201
- , Lebesguesches 203
- Maßbegriff 200
- Maximum, absolutes 34
- , relatives 106
- Meßfehler 67
- Minimum, absolutes 34
- , relatives 106
- Minorante 215
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 74
- – –, erweiterter 78
- – – Integralrechnung 165
- Monotonie 104
- Näherungsformel 92
- Newton, Isaak 9
- Newton-Leibniz, Formel von 169
- Newtonsches Verfahren 129
- Normalbereich 183
- Nullstelle, k -fache 83
- numerisches Verfahren 125
- Oberflächeninhalt 192
- Ordnatenmenge 202
- Ordnungssymbole, Landausche 23
- Operatorgleichung 60
- oszillatorische Unstetigkeitsstelle 30
- partielle Integration 147
- Partialbruchzerlegung 150
- Polstelle 30
- Prinzip von Cavalieri 190
- Produktregel 46
- punktierte Umgebung 11
- Quadratnetz 201
- Quadraturproblem 139
- Quotientenregel 46
- rationale Funktion 149
- – zweier Veränderlicher 156
- rechtsseitig differenzierbar 43
- stetig 27

rechtsseitige Ableitung 43
 rechtsseitiger Grenzwert 14
 Rechteckformel 175
 Regel, Leibnizsche 63
 –, Simpsonsche 179
 Regeln, Bernoulli-de-l'Hospitalische 99
 Regula falsi 125
 rektifizierbar 186
 relativer Extremwert 106
 – Fehler 67
 relatives Maximum 106
 – Minimum 106
 Restglied 85
 –, Cauchysche Form 85
 –, Lagrangesche Form 85
 Riemann-Inhalt 201
 Riemann-Stieltjes-Integral 204
 Rolle, Michel 73
 Rotationsfläche 192
 Rotationskörper, Volumen vom 191
 Rundungsfehler 67

Schema von Horner 80
 Schwerpunkt 195
 –, geometrischer 197
 Sehnenvolygon 174
 Sektorfläche 184
 Sektorformel 184
 Simpsonsche Regel 179
 Spirale, logarithmische 188
 Sprungstelle 29
 Stammfunktion 141
 Startwerte 125
 stetig 25
 – differenzierbar 59
 – –, n -mal 61
 –, linksseitig 27
 –, rechtsseitig 27
 –, stückweise 30
 Stetigkeit 9
 – auf einem Intervall 27
 Stromstärke 41
 stückweise stetig 20

Stufenpunkt 119
 Substitutionsmethode 144, 170

Tabelle der Ableitungen 51
 Tangente 39
 –, einseitige 43
 –, vertikale rechtsseitige 45
 Taylorsche Formel für beliebige Funktionen 84
 – – – ganze rationale Funktionen 79
 – –, MacLaurinsche Form 87
 Trapezformel 176
 Treppenvolygon 175

Umgebung, punktierte 11
 Umkehrfunktion 37
 –, Ableitung der 49
 unbestimmt divergent 18
 unbestimmtes Integral 141
 unecht gebrochene Funktion 149
 uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkter
 Funktion 215
 – – – unendlichen Grenzen 206
 – rechtsseitige Ableitung 45
 uneigentlicher Grenzwert 18
 Unendlichkeitsstelle 30, 215
 Unstetigkeitsstelle 28, 29, 30
 –, hebbare 29
 –, oszillatorische 30

Verfahren, numerisches 125
 – von Newton 129
 vertikale rechtsseitige Tangente 45
 Verzerrungsfunktion 204
 Volumen von Rotationskörpern 191

Weierstraß 35
 Weierstraßsche Zerlegungsformel 64
 Wendepunkt 118
 Wendetangente 119

Zerlegung 161
 Zerlegungen, Folge von unbegrenzt feiner wer-
 denden 161
 Zerlegungsformel von Weierstraß 64